



دانشگاه آزاد اسلامی
واحد الکترونیکی

جزوه آموزشی

سیستم های معین تصمیم گیری و خبره

دکتر محمد علی افشار کاظمی
(ویرایش ۱)

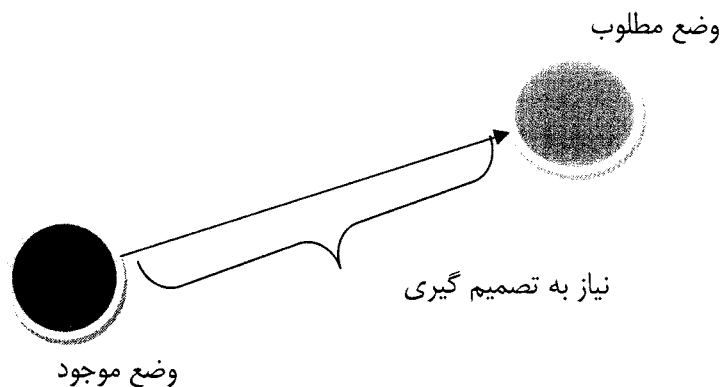
گردآوری:

احد رجایی، فاطمه ستاره، علی اکبر حداد هرنندی
دانشجویان کارشناسی ارشد مدیریت فناوری اطلاعات

نیمسال دوم ۹۰-۱۳۸۹

تصمیم گیری

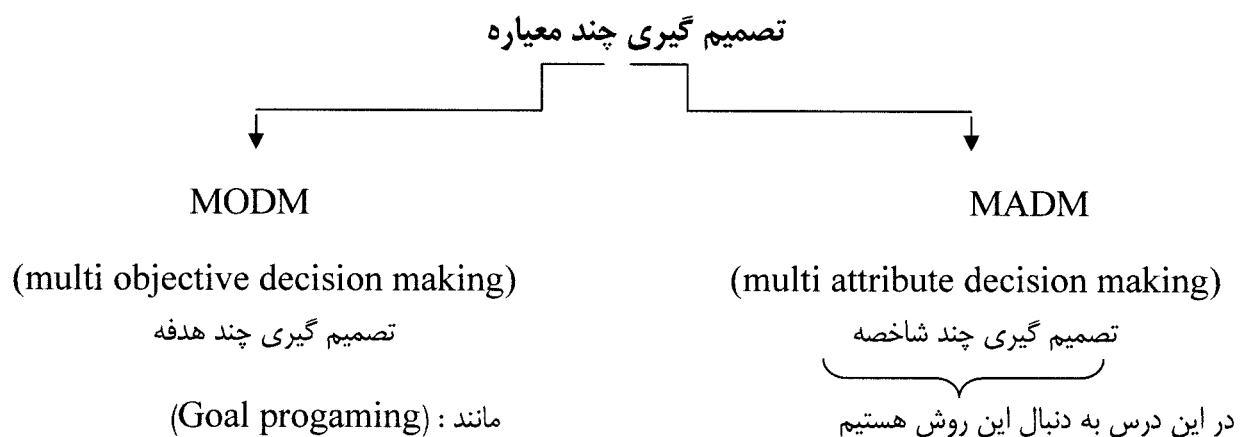
عبارت است از انتخاب یک راه از میان راه کارهای موجود



- برای تصمیم گیری نیاز به شاخص داریم
- وقتی تنها یک شاخص داریم فقط بر اساس بهترین مقدار آن شاخص گزینه های بهینه انتخاب می شود.
- اگر بیش از یک شاخص داشته باشیم خصوصاً وقتی شاخص ها متعارضه (Conflict) تصمیم گیری سخت میشود.
- تئوری های تصمیم گیری به دنبال روش های ضابطه مند بهترین تصمیم گیری هستند.

MCDM

(multi criteria decision making)



تصمیم گیری چند شاخصه :

- اولین کار فرآیند تحقیقاتی روش MADM پیدا کردن شاخص است.
- باید تأثیر گذارترین شاخص ها را انتخاب کرد.
- شاخص ها ، متغیرهای مسأله هستند.
- یکی از بهترین روشهای انتخاب شاخص ها استفاده از روش دلفی است.



روش دلفی معمولی :

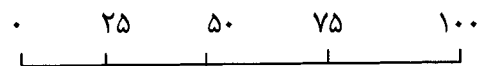
- در این روش ابتدا افراد خبره را شناسایی میکنیم و سپس گامها را طی میکنیم .

➤ گام اول :

- با نامه یا حضوری از افراد خبره فهرست شاخص های مسأله را میپرسیم .
- با حذف اشتراکات , شاخص ها را دسته بندی میکنیم .

➤ گام دوم :

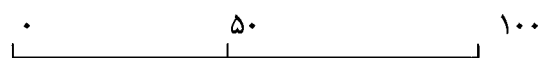
- کل شاخص های دسته بندی شده را برای افراد خبره ی قبلی می فرستیم .
- از افراد خبره می خواهیم شاخص ها را از ۱ تا ۵ اولویت بندی کنند . (امتیاز دادن)



- شاخص های بین ۷۵ تا ۱۰۰ را انتخاب شده تلقی میکنیم (انتخاب نهایی)
- شاخص های بین ۰ تا ۲۵ را حذف میکنیم .
- شاخص های بین ۲۵ تا ۷۵ را برای ارسال مجدد به خبرگان جدا میکنیم .

➤ گام سوم :

- به خبرگان گفته میشود چه شاخص هایی رد شده , پذیرفته شده و کدام ها باید مجدداً اولویت بندی شوند .
- به شاخص هایی که در گام قبلی بین ۲۵ تا ۷۵ بوده اند دوباره از ۱ تا ۵ اولویت بندی میشوند .



- شاخص هایی که امتیاز کمتر از ۵۰ میگیرند حذف و بقیه انتخاب می شوند . (انتخاب نهایی)
- نکته : حتماً تستهای آماری مانند تست T باید انجام گیرد .

روش دلفی اصلاح شده :

این روش مانند دلفی معمولی است با این تفاوت که مرحله ۱ را خودمان انجام میدهیم نه افراد خبره .

ماتریس تصمیم :

	X_1	X_2		X_n
A_1	r_{11}	r_{12}		r_{1n}
A_2	r_{21}	r_{22}		r_{2n}
.	.	.		.
.	.	.		.
.	.	.		.
A_m	r_{m1}	r_{m2}		r_{mn}

A_i : گزینه i ام - X_j : شاخص j ام - r_{ij} : ارزش شاخص j ام برای گزینه i ام (مقادیر به صورت a_{ij} هم نمایش داده میشوند)

قطبیت شاخص ها :

- اگر با افزایش مقدار شاخص ها مطلوبیت افزایش یابد قطبیت آن شاخص مثبت است (مانند سود)
- اگر با افزایش مقدار شاخص ها مطلوبیت کم شود قطبیت آن شاخص منفی است . (مانند هزینه)
- قطبیت جزء مفروضات مدل است .
- معمولاً قطبیت ها غیر خطی هستند ولی به جهت راحتی آنها را خطی میگیریم .

متغیر :

- | | |
|---|-----------|
| ۱-تعریف ایستا: یک صفت مشترک در یک مجموعه ی مورد مطالعه که از یک عضو در مجموعه به عضو دیگر تغییر میکند .
۲-تعریف پویا: صفتی که در گذر زمان تغییر میکند نه از یک عضو به عضو دیگر | } متغیر : |
| ۱-متغیر وابسته (گزینه ها)
۲-متغیر مستقل (شاخص ها) | |
| ۱-کمی : متغیر که به روش استاندارد قابل اندازه گیری است .
۲-کیفی : متغیری که هنوز روش استاندارد برای اندازه گیری آن نداریم . | } متغیر : |

مقیاس :

۱-مقیاس اسمی (nominal)

۲-مقیاس رتبه ای (ordinal)

۳-مقیاس فاصله ای

۴-مقیاس نسبی

مقیاس اسمی : افراز مجموعه به زیر مجموعه های علی السویه

✓ در مقیاس اسمی داده ها نسبت به هم برتری ندارند .

مقیاس رتبه ای : در این مقیاس ترتیب مهم است ولی فواصل مهم نیست .

مقیاس فاصله ای : فاصله داده ها از هم معنا دارد .

مقیاس نسبی : در اینجا داده ها نسبت به یک صفر واقعی قابل سنجش اند .





عملیاتی کردن متغیرهای کیفی :

برای قطبیت مثبت :

خیلی زیاد	زیاد	متوسط	کم	خیلی کم
۵	۴	۳	۲	۱
۹	۷	۵	۳	۱
۱۳	۱۰	۷	۴	۱

برای قطبیت منفی :

خیلی زیاد	زیاد	متوسط	کم	خیلی کم
۱	۳	۵	۷	۹
۱	۲	۳	۴	۵
۱	۴	۷	۱۰	۱۳

✓ در دو جدول مقادیر بینابین نیز میتوان داشت مثلاً برای قطبیت منفی نسبتاً زیاد را ۴ میگیریم .

- چون مقیاس فاصله ای است فواصل باید مساوی باشند ولی خود مقادیر مهم نیستند . بنابراین هر سه دسته عدد در هر جدول باهم فرقی ندارند .

- فرض بر این است که مثلاً امتیاز ۹ ، سه برابر بیشتر از امتیاز ۳ است .

- بنابر فرضهای بالا ترکیب ارزش ها (جمع ، تفریق ، ضرب ، تقسیم) برای شاخص ها مجاز است .

بی مقیاس سازی :

چون شاخص ها دارای واحدهای اندازه گیری مختلفی هستند باید بدون بعد شوند .

روشهای بی مقیاس سازی :

۱- روش نورم

۲- بی مقیاس سازی خطی

۳- بی مقیاس سازی فازی

۴- نرمالیزه کردن

۱- روش نورم :

$$N_{ij} = \frac{A_{ij}}{\sqrt{\sum A_{ij}^2}} \quad \text{عدد نرمال شده}$$

۲- بی مقیاس سازی خطی :

$$N_{ij} = \frac{A_{ij}}{\max A_{ij}} \quad (\text{در صورت مثبت بودن قطبیت همه ی شاخص ها})$$

$$N_{ij} = \frac{\min A_{ij}}{A_{ij}} \quad (\text{در صورت منفی بودن قطبیت همه ی شاخص ها})$$

در صورت مخلوط بودن شاخص ها ؛ قطبیت منفی و مثبت ، قطبیت منفی را با معکوس کردن نتیجه به قطبیت مثبت تبدیل میکنیم .

۱- بی مقیاس سازی فازی : در اینجا از آن استفاده نمیکنیم

۲- نرمالیزه کردن :

$$P_{ij} = \frac{A_{ij}}{\sum A_{ij}} \quad \text{عدد نرمال شده}$$

بعد از نرمالیزه کردن مجموعه ای از اعداد جمع آنها مساوی ۱ خواهد شد.

تعیین اوزان شاخص ها :

وزن شاخص به میزان اهمیت هر شاخص در ارزیابی گزینه ها اشاره دارد.

انواع وزن :

- ۱- وزن درونی (objective) : به پراکندگی و جنس داده ها در ماتریس تصمیم بستگی دارد و نه نظر او بستگی دارد .
- ۲- وزن بیرونی (subjective) : به نظر تصمیم گیرنده و میزان مطلوبیت گزینه ها در هر شاخص از نظر او بستگی دارد .

روشهای ارزیابی
اوزان شاخص ها:

- ۱- آنتروپی :
 - ۲- Lin map :
 - ۳- کم ترین مجذورات موزون
 - ۴- بردار ویژه
- برای محاسبه اوزان درونی (با استفاده از ماتریس تصمیم)
- برای محاسبه اوزان بیرونی (بدون نیاز به ماتریس تصمیم)



آنتروپی :

آنتروپی مفهومی در تئوری اطلاعات است که نشان دهنده ی علوم اطمینان است .

$$E = S\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\} = -K \sum [p_i \cdot \ln p_i]$$

$$K > 0$$

$$0 \leq E \leq 1$$

مراحل محاسبه آنتروپی :

۱- نرمالیز کردن ماتریس تصمیم

$$p_{ij} = \frac{r_{ij}}{\sum_{i=1}^m r_{ij}} ; \forall i, j$$

$$E = -K \sum p_{ij} - \ln p_{ij} \quad 2-$$

-وظیفه لگاریتم کاهش پراکندگی بین اعداد است.

-در اثر نرمالایز کردن مقادیر p_{ij} ها کمتر از یک هستند و لگاریتم آنها منفی است . پس با قرار دادن محدودیت

منفی در فرمول E مقداری مثبت پیدا میکند .

$$K = \frac{1}{\ln m} \quad \text{که در آن } m \text{ مقدار گزینه هاست .}$$

$$d_j = 1 - E_j , \forall j \quad 3-$$

d_j عدم اطمینان یا میزان انحراف به ازای شاخص j ام .

$$W_j = \frac{d_j}{\sum_{j=1}^n d_j} \quad 4-$$

W_j وزن درونی شاخص j ام .

- در مرحله ی ۴ خود d_j ها را نرمالایز کرده ایم ، لذا مجموع d_j برابر یک خواهد بود .

- اگر وزن بیرونی هم داشته باشیم آنگاه وزنها بدست آمده از طریق آنتروپی برا به شکل روبرو تعدیل میکنیم :

$$W_j' = \frac{\lambda_j \cdot W_j}{\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot W_j}$$

مثال :

فرض کنید یک دانش آموخته دانشگاهی ، قصد دارد از بین ۴ شغل ، با توجه به ۵ شاخص ، یکی را انتخاب کند. شاخص ها عبارتند از : درآمد ، موقعیت اجتماعی ، سختی کار ، مسافت تا محل کار و امنیت اجتماعی (درآمد بر حسب ده هزار تومان و مسافت بر حسب کیلو متر است) .

۱-تهیه ماتریس تصمیم:

$A_i \backslash C_j$	C_1 درآمد	C_2 موقعیت اجتماعی	C_3 سختی	C_4 مسافت	C_5 امنیت
A_1	۱۵	زیاد	نسبتاً زیاد	۱۰	زیاد
A_2	۱۲	متوسط	متوسط	۳	خیلی زیاد
A_3	۲۰	خیلی زیاد	زیاد	۳۰	متوسط
A_4	۳۰	کم	خیلی زیاد	۱	کم

۲-عملیاتی کردن متغیرهای کیفی:

به کمک طیف لیکرت برای شاخص های با قطبیت مثبت و منفی ماتریس کمی شده به دست می آید:

$A_i \backslash$ شاخص	C_1+	C_2+	C_3-	C_4-	C_5+
A_1	۱۵	۷	۴	۱۰	۷
A_2	۱۲	۵	۵	۳	۹
A_3	۲۰	۲	۳	۳۰	۵
A_4	۳۰	۳	۱	۱	۳
Σ	۷۷	۲۴	۱۳	۴۴	۲۴

۳-بی مقیاس سازی به روش نرمالیزه:

$$p_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum a_{ij}}$$

$$p_{11} = \frac{15}{77} = 0.195$$

$$p_{31} = \frac{20}{77} = 0.260$$

$$p_{21} = \frac{12}{77} = 0.156$$

$$p_{41} = \frac{30}{77} = 0.389$$

به همین صورت ماتریس بی مقیاس شده به روش نرمالیزه به صورت زیر بدست می آید:

$A_j \backslash C_i$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	۰/۱۹۵	۰/۲۹۲	۰/۳۰۸	۰/۲۲۷	۰/۲۹۲
A_2	۰/۱۵۶	۰/۲۰۸	۰/۳۸۵	۰/۰۶۸	۰/۳۷۵
A_3	۰/۲۶۰	۰/۳۷۵	۰/۲۳۱	۰/۶۸۲	۰/۲۰۸
A_4	۰/۳۸۹	۰/۱۲۵	۰/۰۷۷	۰/۰۲۳	۰/۱۲۵

۴-بدست آوردن اوزان درونی به روش آنترویی:

گام اول: در روش آنترویی بدست آوردن ماتریس بی مقیاس شده به روش نرمالایز بوده که قبلاً بدست آمد.

گام دوم: بدست آوردن مقدار اطمینان با فرمول $E = -K \sum [p_i \cdot \ln p_i]$

$$m=4 \Rightarrow K = \frac{1}{\ln m} = \frac{1}{\ln 4} = 0.721$$

$$1 \text{ ستون: } E_1 = -0.721 [0.195 \ln(0.195) + 0.156 \ln(0.156) + 0.260 \ln(0.260) + 0.389 \ln(0.389)] = 0.956$$

$$2 \text{ ستون: } E_2 = -0.721 [0.292 \ln(0.292) + 0.208 \ln(0.208) + 0.375 \ln(0.375) + 0.125 \ln(0.125)] = 0.947$$

$$3 \text{ ستون: } E_3 = -0.721 [0.308 \ln(0.308) + 0.385 \ln(0.385) + 0.231 \ln(0.231) + 0.077 \ln(0.077)] = 0.913$$

$$4 \text{ ستون: } E_4 = -0.721 [0.227 \ln(0.227) + 0.068 \ln(0.068) + 0.682 \ln(0.682) + 0.023 \ln(0.023)] = 0.625$$

$$5 \text{ ستون: } E_5 = -0.721 [0.292 \ln(0.292) + 0.375 \ln(0.375) + 0.208 \ln(0.208) + 0.125 \ln(0.125)] = 0.947$$

نتایج گام دوم

E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
۰/۹۵۶	۰/۹۴۷	۰/۹۱۳	۰/۶۲۵	۰/۹۴۷

گام سوم: بدست آوردن مقادیر عدم اطمینان $d_j = 1 - E_j$, $\forall j$

نتایج گام سوم

d_j	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	Σd_j
$1 - E_j$	۰/۰۴۴	۰/۰۵۳	۰/۰۸۷	۰/۳۷۵	۰/۰۵۳	۰/۶۱۲

گام چهارم: بدست آوردن اوزان شاخص ها: $W_j = \frac{d_j}{\sum_{j=1}^n d_j}$

$$W_1 = \frac{0.044}{0.612} \quad W_2 = \frac{0.053}{0.612} \quad W_3 = \frac{0.087}{0.612} \quad W_4 = \frac{0.375}{0.612} \quad W_5 = \frac{0.053}{0.612}$$

نتایج گام چهارم

W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
۰/۰۷۲	۰/۰۸۷	۰/۱۴۲	۰/۶۱۳	۰/۰۸۷

نکته:

$$\sum_{j=1}^n W_j = 1$$

۲- اگر در قضاوت فرد تصمیم گیرنده هیچ وزنی برای شاخص ها در نظر نگرفته باشد، همین اوزان را بعنوان وزن شاخص ها

در نظر میگیریم. در غیر اینصورت به گام بعدی میرویم.

گام پنجم: فرض کنید تصمیم گیرنده به شاخص ها وزن داده باشد (وزن بیرونی)

$$\lambda_1 = 0.1 \quad \lambda_2 = 0.2 \quad \lambda_3 = 0.15 \quad \lambda_4 = 0.3 \quad \lambda_5 = 0.25$$

در اینصورت اوزان تعدیل شده را بدست می آوریم:

$$W'_j = \frac{\lambda_j \cdot W_j}{\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot W_j}$$

$$\sum \lambda_j \cdot W_j = (0.1 \cdot 0.072) + (0.2 \cdot 0.087) + (0.15 \cdot 0.142) + (0.3 \cdot 0.613) + (0.25 \cdot 0.053) = 0.252$$

$$W'_1 = \frac{0.072 \times 0.1}{0.252}$$

$$W'_2 = \frac{0.087 \times 0.2}{0.252}$$

$$W'_3 = \frac{0.142 \times 0.15}{0.252}$$

$$W'_4 = \frac{0.613 \times 0.3}{0.252}$$

$$W'_5 = \frac{0.053 \times 0.25}{0.252}$$

نتایج گام پنجم

W'_1	W'_2	W'_3	W'_4	W'_5
۰/۰۲۹	۰/۰۶۹	۰/۰۸۵	۰/۷۳۱	۰/۰۸۶

روش SAW (simple adding weighted)

این روش ساده ترین روشهای تصمیم گیری است .

مراحل روش SAW

۱- کمی کردن ماتریس تصمیم گیری

۲- بی مقیاس سازی خطی مقادیر ماتریس تصمیم گیری

۳- ضرب ماتریس بی مقیاس شده در اوزان شاخص ها

۴- انتخاب بهترین گزینه (A^*) با استفاده از معیار روبرو : $A^* = \{A_i | \max \sum_{j=1}^n n_{ij} \cdot w_j\}$

مثال : برای مسأله دانش آموخته روش SAW را به کار ببرید.

نکته : برای این مسأله قبلاً بی مقیاس سازی (نرمالیزه کردن) انجام شده است و نهایتاً اوزان درونی به روش آنتروپی بدست آمد . و این اوزان با اوزان بیرونی تعدیل شده . توجه کنید که در روش SAW در انتخاب بهترین گزینه ملاک بزرگترین مقدار است . لذا باید حتماً از روش بی مقیاس سازی خطی استفاده شود . زیرا در این روش برای شاخص های منفی مقادیر را معکوس میکنیم تا با شاخص های مثبت قابل مقایسه شوند .

ماتریس کمی شده :

$A_j \backslash C_j$	C_{1+}	C_{2+}	C_{3-}	C_{4-}	C_{5+}
A_1	۱۵	۷	۴	$\frac{1}{10}$ ← ۱۰	۷
A_2	۱۲	۵	۵	$\frac{1}{3}$ ← ۳	۹
A_3	۲۰	۲	۳	$\frac{1}{30}$ ← ۳۰	۵
A_4	۳۰	۳	۱	$\frac{1}{1}$ ← ۱	۳

در ماتریس بالا مقادیر شاخص های منفی را ابتدا معکوس میکنیم (تا شاخص مثبت شود) آنگاه به روش بی مقیاس سازی خطی برای شاخص های مثبت عمل میکنیم :

$$N_{ij} = \frac{A_{ij}}{\max A_{ij}}$$

برای C_3 در موقع کمی سازی این کار را انجام داده ایم پس باید برای شاخص C_4 که قطبیت منفی دارد و کمی است این کار را بکنیم .



$A_j \backslash C_j$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	$\frac{15}{30} = 0.5$	$\frac{7}{9} = 0.778$	$\frac{4}{5} = 0.8$	$\frac{1}{10} = 0.1$	$\frac{7}{9} = 0.778$
A_2	$\frac{12}{30} = 0.4$	$\frac{5}{9} = 0.556$	$\frac{5}{5} = 1$	$\frac{1}{3} = 0.334$	$\frac{9}{9} = 1$
A_3	$\frac{20}{30} = 0.667$	$\frac{9}{9} = 1$	$\frac{3}{5} = 0.6$	$\frac{1}{30} = 0.033$	$\frac{5}{9} = 0.556$
A_4	$\frac{30}{30} = 1$	$\frac{3}{9} = 0.334$	$\frac{1}{5} = 0.2$	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{3}{9} = 0.334$

قبلاً نیز اوزان تعدیل شده شاخص ها را داشتیم :

W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
۰/۰۲۹	۰/۰۶۹	۰/۰۸۵	۰/۷۳۱	۰/۰۸۶

اکنون کافی است ماتریس بی مقیاس شده به روش خطی را در اوزان شاخص ها ضرب کنیم :

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.778 & 0.8 & 0.1 & 0.778 \\ 0.4 & 0.556 & 1 & 0.334 & 1 \\ 0.667 & 1 & 0.6 & 0.033 & 0.556 \\ 1 & 0.334 & 0.2 & 1 & 0.334 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.029 \\ 0.069 \\ 0.085 \\ 0.731 \\ 0.086 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.276 \\ 0.465 \\ 0.211 \\ 0.827 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow A_1 \\ \leftarrow A_2 \\ \leftarrow A_3 \\ \leftarrow A_4 \end{matrix}$$

با توجه به مقادیر اولویت بندی گزینه ها بشرح زیر خواهد بود :

A_4-1

A_2-2

A_1-3

A_3-4

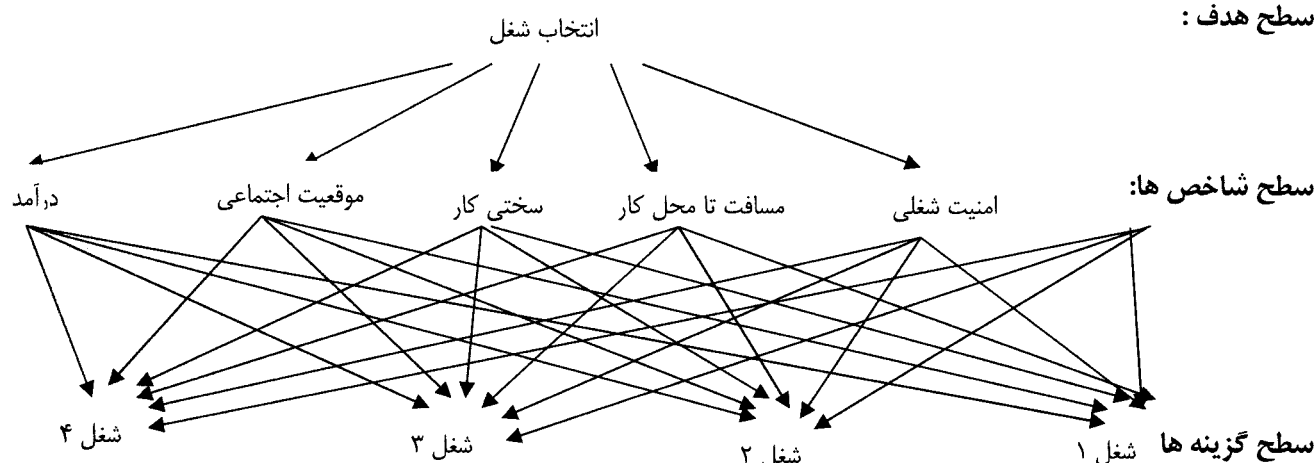
روش AHP (Analytic Hierarchy Process)

از آن جا که روش AHP روش تصمیم گیری بر مبنای اوزان ذهنی یا بیرونی است . ابتدا در مورد ماتریس مقایسات زوجی که در آن گزینه به صورت دو بدو از نظر هر شاخص با هم مقایسه می شوند صحبت میکنیم .

مثال : روش را در قالب مثال فرد دانش آموخته دنبال میکنیم .

در این مثال ۵ شاخص در آمد ، موقعیت اجتماعی ، سختی ، مسافت و امنیت برای ۴ گزینه ی شغل مطرح بود . ابتدا سلسله مراتب را در سه سطح هدف ، شاخص ، گزینه تشکیل میدهم (نمودار درختی)

سطح هدف :



اکنون ماتریس مقایسات زوجی را بدست می آوریم :

اعداد داخل جدول ارجحیت سطر به ستون را نشان می دهد . $\left(\frac{w_i}{w_j} \right)$

اگر دو عنصر اهمیت یکسانی داشته باشند : (۱)

اگر یکی نسبت به دیگری نسبتاً ترجیح زیاد داشته باشد : (۳)

اگر یکی نسبت به دیگری ترجیح زیاد داشته باشد : (۵)

اگر یکی نسبت به دیگری بسیار زیاد داشته باشد : (۷)

اگر یکی نسبت به دیگری ترجیح فوق العاده زیاد داشته باشد : (۹)

درآمد	شغل ۱	شغل ۲	شغل ۳	شغل ۴
شغل ۱	1	7	$\frac{1}{4}$	2
شغل ۲	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{1}{5}$	3
شغل ۳	4	5	1	$\frac{1}{9}$
شغل ۴	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	9	1

برای ارزش های بینایی نیز اعداد ۲، ۴، ۶، ۸ در نظر میگیریم



در مثال بالا فرض کنید

درآمد شغل ۱ نسبت به شغل ۲ ترجیح بسیار زیاد دارد پس: $\frac{\text{درآمد شغل ۱}}{\text{درآمد شغل ۲}} = 7$

و درآمد شغل ۴ به شغل ۳ فوق العاده است پس: $\frac{\text{درآمد شغل ۴}}{\text{درآمد شغل ۳}} = 9$

نکات:

- ۱- اعداد در جدول ارجحیت سطر به ستون را نشان میدهد.
- ۲- عناصر روی قطر اصلی ۱ اند زیرا هر عنصر نسبت به خودش ارجحیت ۱ دارد.
- ۳- عناصر بالای قطر اصلی و زیر قطر اصلی دو بدو معکوس هم هستند.
- ۴- این اعداد ذهنی اند و در هیچ کدام از مقیاس های ۴ گانه نمیگنجند. مثلاً ۹ بمعنای ۳ برابر مهمتر از ۳ نیست.
- ۵- ماتریس مقایسات زوجی نمیتواند بیشتر از 7 ± 2 باشد. یعنی افراد کند ذهن حداکثر 5×5 و افراد باهوش حداکثر ماتریس 9×9 را میتوانند به صورت ذهنی تعیین ارجحیت نمایند.
- ۷- ماتریس مقایسات زوجی باید سازگار باشد یعنی اعداد نباید همدیگر را نقض کنند.

مثال:

از نظر منطقی شغل ۳ از نظر درآمد بهتر از شغل ۱ خواهد بود
 اگر شغل ۱ را به ۳ ترجیح دهیم ناسازگاری رخ میدهد.
 بدین ترتیب برای همه ی شاخص ها میتوان شغل ها را به صورت ۲ به ۲ با هم در جدول مقایسات زوجی مقایسه نمود.

ماتریس مقایسه ی زوجی درآمد را در نظر گرفته و مراحل زیر را دنبال میکنیم.

درآمد	شغل ۱	شغل ۲	شغل ۳	شغل ۴		درآمد	شغل ۱	شغل ۲	شغل ۳	شغل ۴
شغل ۱	1	7	$\frac{1}{4}$	2	جمع مقادیر هر ستون →	شغل ۱	1	7	$\frac{1}{4}$	2
شغل ۲	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{1}{5}$	3		شغل ۲	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{1}{5}$	3
شغل ۳	4	5	1	$\frac{1}{9}$		شغل ۳	4	5	1	$\frac{1}{9}$
شغل ۴	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	9	1		شغل ۴	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	9	1
						Σ	$\frac{79}{14}$	$\frac{40}{3}$	$\frac{209}{20}$	$\frac{55}{9}$

درآمد	شغل ۱	شغل ۲	شغل ۳	شغل ۴	
شغل ۱	۰/۱۷۷	۰/۵۲۵	۰/۰۲۴	۰/۳۲۷	
شغل ۲	۰/۰۲۵	۰/۰۷۵	۰/۰۱۹	۰/۴۹۱	
شغل ۳	۰/۷۱	۰/۳۷۵	۰/۰۹۶	۰/۰۱۸	
شغل ۴	۰/۰۸۹	۰/۰۲۵	۰/۸۶۱	۰/۱۶۴	
Σ	۱	۱	۱	۱	

تقسیم کردن هر عنصر به جمع کل ستون (نرمالایز کردن) $\rightarrow$

متوسط عناصر هر سطر $\rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 0.263 \\ 0.153 \\ 0.3 \\ 0.285 \end{bmatrix}$$

ماتریس مقایسه زوجی شغل ها نسبت به شاخص موقعیت اجتماعی

موقعیت اجتماعی	شغل ۱	شغل ۲	شغل ۳	شغل ۴		موقعیت اجتماعی	شغل ۱	شغل ۲	شغل ۳	شغل ۴
شغل ۱	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	3	جمع مقادیر هر ستون $\rightarrow$	شغل ۱	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	3
شغل ۲	$\frac{1}{2}$	1	5	7		شغل ۲	$\frac{1}{2}$	1	5	7
شغل ۳	4	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{9}$		شغل ۳	4	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{9}$
شغل ۴	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$	9	1		شغل ۴	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$	9	1
						Σ	$\frac{35}{6}$	$\frac{129}{70}$	$\frac{61}{4}$	$\frac{100}{9}$

موقعیت اجتماعی	شغل ۱	شغل ۲	شغل ۳	شغل ۴	
شغل ۱	۰/۱۷۱	۰/۲۷۱	۰/۰۱۶	۰/۲۷	
شغل ۲	۰/۰۸۵	۰/۵۴۲	۰/۳۲۷	۰/۶۳	
شغل ۳	۰/۶۸۵	۰/۱۰۸	۰/۰۶۵	۰/۰۱	
شغل ۴	۰/۰۵۷	۰/۰۷۷	۰/۵۹۰	۰/۰۹	
Σ	۱	۱	۱	۱	

تقسیم کردن هر عنصر به جمع کل ستون (نرمالایز کردن) $\rightarrow$

متوسط عناصر هر سطر $\rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 0.182 \\ 0.397 \\ 0.217 \\ 0.204 \end{bmatrix}$$

ماتریس مقایسه ی زوجی نسبت به شاخص سختی کار

سختی کار	شغل ۱	شغل ۲	شغل ۳	شغل ۴	سختی کار	شغل ۱	شغل ۲	شغل ۳	شغل ۴
شغل ۱	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	شغل ۱	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$
شغل ۲	2	1	5	1	شغل ۲	2	1	5	1
شغل ۳	1	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{7}$	شغل ۳	1	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{7}$
شغل ۴	4	1	7	1	شغل ۴	4	1	7	1
					Σ	8	$\frac{27}{10}$	14	$\frac{67}{28}$

جمع مقادیر
هر ستون

تقسیم کردن هر عنصر به جمع کل ستون (نرمالایز کردن)	سختی کار	شغل ۱	شغل ۲	شغل ۳	شغل ۴	متوسط عناصر هر سطر
شغل ۱	شغل ۱	۰/۱۲۵	۰/۱۸۵	۰/۰۷	۰/۱۰۴	0.122
شغل ۲	شغل ۲	۰/۲۵	۰/۳۷	۰/۳۵	۰/۴۱۷	0.349
شغل ۳	شغل ۳	۰/۱۲۵	۰/۰۷	۰/۰۷	۰/۰۵۹	0.083
شغل ۴	شغل ۴	۰/۵	۰/۳۷	۰/۵	۰/۴۱۷	0.447
	Σ	۱	۱	۱	۱	

ماتریس مقایسه ی زوجی نسبت به شاخص مسافت

مسافت	شغل ۱	شغل ۲	شغل ۳	شغل ۴	مسافت	شغل ۱	شغل ۲	شغل ۳	شغل ۴
شغل ۱	1	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	شغل ۱	1	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$
شغل ۲	2	1	5	3	شغل ۲	2	1	5	3
شغل ۳	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	1	1	شغل ۳	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	1	1
شغل ۴	2	$\frac{1}{3}$	1	1	شغل ۴	2	$\frac{1}{3}$	1	1
					Σ	$\frac{11}{2}$	$\frac{61}{30}$	9	$\frac{11}{2}$



مسافت	شغل ۱	شغل ۲	شغل ۳	شغل ۴	
تقسیم کردن هر عنصر به جمع کل ستون (نرمالایز کردن)	شغل ۱	۰/۱۸۱	۰/۲۴۵	۰/۲۲۲	۰/۰۹
	شغل ۲	۰/۳۶۳	۰/۴۹۱	۰/۵۵۵	۰/۵۴۵
	شغل ۳	۰/۰۹	۰/۰۹۸	۰/۱۱۱	۰/۱۸۱
	شغل ۴	۰/۳۶۳	۰/۱۶۳	۰/۱۱۱	۰/۱۸۱
Σ	۱	۱	۱	۱	

متوسط عناصر هر سطر $\rightarrow$

0.185
0.489
0.121
0.205

ماتریس مقایسه ی زوجی نسبت به شاخص امنیت شغلی (فرض کنیم هیچکدام بر دیگری برتری ندارد)

امنیت شغلی	شغل ۱	شغل ۲	شغل ۳	شغل ۴		امنیت شغلی	شغل ۱	شغل ۲	شغل ۳	شغل ۴
شغل ۱	۱	۱	۱	۱	جمع مقادیر هر ستون $\rightarrow$	شغل ۱	۱	۱	۱	۱
شغل ۲	۱	۱	۱	۱		شغل ۲	۱	۱	۱	۱
شغل ۳	۱	۱	۱	۱		شغل ۳	۱	۱	۱	۱
شغل ۴	۱	۱	۱	۱		شغل ۴	۱	۱	۱	۱
	Σ	۴	۴	۴		Σ	۴	۴	۴	۴

امنیت شغلی	شغل ۱	شغل ۲	شغل ۳	شغل ۴	
تقسیم کردن هر عنصر به جمع کل ستون (نرمالایز کردن)	شغل ۱	۰/۲۵	۰/۲۵	۰/۲۵	۰/۲۵
	شغل ۲	۰/۲۵	۰/۲۵	۰/۲۵	۰/۲۵
	شغل ۳	۰/۲۵	۰/۲۵	۰/۲۵	۰/۲۵
	شغل ۴	۰/۲۵	۰/۲۵	۰/۲۵	۰/۲۵
Σ	۱	۱	۱	۱	

متوسط عناصر هر سطر $\rightarrow$

0.25
0.25
0.25
0.25

نتیجه مراحل قبل در ماتریس زیر خلاصه می شود:

وزن شغلها نسبت به معیارها

	امنیت	مسافت	سختی کار	موقعیت	درآمد
شغل ۱	۰/۲۵	۰/۱۸۵	۰/۱۲۲	۰/۱۸۲	۰/۲۶۳
شغل ۲	۰/۲۵	۰/۴۸۹	۰/۳۴۹	۰/۳۹۷	۰/۱۵۳
شغل ۳	۰/۲۵	۰/۱۲۱	۰/۰۸۳	۰/۲۱۷	۰/۳
شغل ۴	۰/۲۵	۰/۲۰۵	۰/۴۴۷	۰/۲۰۴	۰/۲۸۵

اکنون مقایسات سطح پایین به اتمام رسید .

در سطح بالاتر باید مقایسه ی معیارها را نسبت به هم انجام دهیم .

اهداف تصمیم	امنیت	مسافت	سختی	موقعیت	درآمد
درآمد	5	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
موقعیت	1	1	$\frac{1}{4}$	1	2
سختی	5	$\frac{1}{2}$	1	4	3
مسافت	$\frac{1}{9}$	1	2	1	4
امنیت	1	9	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{5}$
Σ	$\frac{109}{9}$	$\frac{94}{8}$	$\frac{227}{60}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{51}{25}$

جمع مقادیر
هر ستون

اهداف تصمیم	امنیت	مسافت	سختی	موقعیت	درآمد
درآمد	۰/۴۱۲	۰/۰۲۱	۰/۰۸۸	۰/۰۶۶	۰/۰۹۸
موقعیت	۰/۰۸۲	۰/۰۸۵۱	۰/۰۶۶	۰/۱۳۳	۰/۱۹۶
سختی	۰/۴۱۲	۰/۰۴۲	۰/۲۶۴	۰/۵۳۳	۰/۲۹۴
مسافت	۰/۰۰۹	۰/۰۸۵۱	۰/۵۲۸	۰/۱۳۳	۰/۳۹۲
امنیت	۰/۰۸۲	۰/۰۷۶۵	۰/۰۵۲	۰/۱۳۳	۰/۰۱۹

تقسیم کردن هر عنصر به جمع کل ستون (نرمالایز کردن)

متوسط عناصر هر سطر

$\begin{bmatrix} 0.687 \\ 0.141 \\ 0.387 \\ 0.287 \\ 0.264 \end{bmatrix}$

اکنون مرحله نهایی ارزیابی صورت میگیرد . در مرحله ی اول ماتریس وزن شغل ها نسبت به معیارها که یک ماتریس ۴×۵ بود بدست آمد . در این مرحله ماتریس تصمیم گیری نسبت به شاخص ها که یک ماتریس ۵×۱ است حاصل شد . در ارزیابی نهایی ایندو را در هم ضرب میکنیم .

$$\begin{bmatrix} 0.263 & 0.182 & 0.122 & 0.185 & 0.25 \\ 0.153 & 0.397 & 0.349 & 0.489 & 0.25 \\ 0.3 & 0.217 & 0.083 & 0.121 & 0.25 \\ 0.285 & 0.204 & 0.447 & 0.205 & 0.25 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.687 \\ 0.141 \\ 0.387 \\ 0.287 \\ 0.264 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.373 \\ 0.502 \\ 0.37 \\ 0.522 \end{bmatrix}$$

با توجه به مقادیر بدست آمده اولویت انتخاب شغل به صورت زیر است :

شغل ۴ ← ۰/۵۲۲

شغل ۲ ← ۰/۵۰۲

شغل ۱ ← ۰/۳۷۳

شغل ۳ ← ۰/۳۷

در مثال حل شده وزن ماتریس مقایسه ی زوجی هر معیار با یک روش تقریبی بدست آوردیم . یعنی جمع ستونی؛ نرمالایز کردن و میانگین سطری. اکنون روشهای گوناگون بدست آوردن این وزن را بررسی میکنیم . این روشها عبارتند از :

۱-روش حداقل مربعات

۲-روش حداقل مربعات لگاریتمی

۳-روش بردار ویژه

۴-روش های تقریبی

روش حداقل مربعات :

اگر ماتریس مقایسه زوجی کاملاً با ثبات باشد به روشی که در مثال حل کردیم میتوان از نرمالایز نمودن بهره برد . ولی اگر این ماتریس سازگار نباشد نمیتوان از روش نرمالایز استفاده کرد زیرا در رابطه ی $a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$ تردید وجود دارد.

$$a_{ij} \neq \frac{w_i}{w_j} \Rightarrow w_i - a_{ij} \cdot w_j \neq 0 \text{ : یعنی}$$

در روش حداقل مربعات به دنبال آنیم که این میزان انحرافات حداقل باشد . مدل ریاضی این مسأله عبارتست از :

$$\begin{aligned} \text{Min : } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (w_i - a_{ij} \cdot w_j)^2 \\ \Rightarrow L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (w_i - a_{ij} \cdot w_j)^2 + \lambda (\sum_{i=1}^n w_i - 1) \end{aligned}$$

$$\text{s.t: } \sum_{i=1}^n w_i = 1$$

مثال : فرض کنید $n=2$:

$$L = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (w_i - a_{ij} \cdot w_j)^2 + \lambda (\sum_{i=1}^2 w_i - 1)$$

$$L = \sum_{i=1}^2 (w_i - a_{i1} \cdot w_1)^2 + \sum_{i=1}^2 (w_i - a_{i2} \cdot w_2)^2 + \lambda (\sum_{i=1}^2 w_i - 1)$$

$$= \underbrace{[(w_1 - a_{11} \cdot w_1)^2 + (w_2 - a_{21} \cdot w_1)^2]}_{\substack{1 \quad 0}} + \underbrace{[(w_1 - a_{12} \cdot w_2)^2 + (w_2 - a_{22} \cdot w_2)^2]}_{\substack{0 \quad 1}}$$

$$= [0 + (w_2 - a_{21} \cdot w_1)^2] + [(w_1 - a_{12} \cdot w_2)^2 + 0] + \lambda (w_1 + w_2 - 1)$$

اکنون از معادله بالا یک بار نسبت به w_1 و یک بار نسبت به w_2 و یک بار نسبت به λ مشتق میگیریم و سه معادله و سه مجهول بدست می آوریم. (توجه کنید a_{11} و a_{22} چون روی قطر اصلی ماتریس مقایسه ی زوجی قرار دارد و برابر ۱ است)

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial w_1} \left\{ \begin{aligned} 2a_{21}(a_{21} \cdot w_1 - w_2) - 2(a_{12} \cdot w_2 - w_1) + \lambda &= 0 \Rightarrow a_{21}(a_{21} \cdot w_1 - w_2) - (a_{12} \cdot w_2 - w_1) + \frac{\lambda}{2} = 0 \\ -2(a_{21} \cdot w_1 - w_2) - 2a_{12}(a_{12} \cdot w_2 - w_1) + \lambda &= 0 \Rightarrow -(a_{21} \cdot w_1 - w_2) - a_{12}(a_{12} \cdot w_2 - w_1) + \frac{\lambda}{2} = 0 \end{aligned} \right. \\ \frac{\partial L}{\partial w_2} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} \end{cases} \begin{cases} w_1 + w_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 + a_{21}^2)w_1 - (a_{21} + a_{12})w_2 + \frac{\lambda}{2} = 0 \\ -(a_{21} + a_{12})w_1 - (1 + a_{12}^2)w_2 + \frac{\lambda'}{2} = 0 \\ w_1 + w_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} (1 + a_{21}^2) & -(a_{21} + a_{12}) & 1 \\ -(a_{21} + a_{12}) & (1 + a_{12}^2) & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \lambda' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

به همین ترتیب برای $n=3$ نیز خواهیم داشت :

$$\begin{bmatrix} (2 + a_{21}^2 + a_{31}^2) & -(a_{12} + a_{21}) & -(a_{13} + a_{31}) & 1 \\ -(a_{21} + a_{12}) & (2 + a_{12}^2 + a_{32}^2) & -(a_{23} + a_{32}) & 1 \\ -(a_{31} + a_{13}) & -(a_{32} + a_{23}) & (2 + a_{13}^2 + a_{23}^2) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \lambda' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

روش حداقل مربعات لگاریتمی

در این روش به جای حداقل نمودن $\text{Min} : \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (w_i - a_{ij} \cdot w_j)^2$ از تابع زیر استفاده میشود :

$$\text{Min} : \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\ln a_{ij} + \ln w_j - \ln w_i)$$

روش بردار ویژه :

۱- ماتریس مقایسه زوجی (ماتریس A) را تشکیل می دهیم .

۲- ماتریس $(A - \lambda I)$ را مشخص میکنیم .

۳- دترمینان ماتریس $(A - \lambda I)$ را محاسبه کرده و مساوی صفر قرار داده و مقادیر λ را محاسبه میکنیم .

۴- بزرگترین λ را λ_{max} نامیده و آنرا در رابطه ی $(A - \lambda_{max} I) \times W = 0$ قرار داده و W_i ها را محاسبه مینماییم .

مثال : برای ماتریس مقایسات زوجی زیر به روش بردار ویژه وزن ها را مشخص کنید :

برای سادگی محاسبات از طریق روش بردار ویژه به گونه ای دیگر نیز عمل میکنند.

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 9 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ 4 & \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix} = 1 \quad W = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{D^k \cdot e}{e^T \cdot D^k \cdot e}, \quad e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$D^k \cdot e = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 9 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ 4 & \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.694 \\ 15 \\ 4.83 \\ 7.5 \end{bmatrix}$$

$$e^T \cdot D^k \cdot e = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \times \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 9 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ 4 & \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 29.024$$

$$\frac{D^k \cdot e}{e^T \cdot D^k \cdot e} = \frac{1}{29.024} \times \begin{bmatrix} 1.694 \\ 15 \\ 4.83 \\ 7.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.05837 \\ 0.51681 \\ 0.16641 \\ 0.25841 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$W = (0.05837, 0.51681, 0.16641, 0.25741)$$

مرحله دوم :

$$D^2 = D \times D = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 9 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ 4 & \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 9 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ 4 & \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0.4583 & 1.5 & 0.8889 \\ 35 & 4 & 13 & 7.75 \\ 11 & 1.25 & 4 & 2.4167 \\ 18.5 & 2.1111 & 6.8333 & 4 \end{bmatrix}$$

$$W^2 = \frac{D^2 \cdot e}{e^T \cdot D^2 \cdot e} = (0.05867, 0.51196, 0.15994, 0.26943)$$

$$W^3 = \frac{D^3 \cdot e}{e^T \cdot D^3 \cdot e} = (0.05882, 0.51259, 0.15958, 0.26890)$$

$$W^4 = \frac{D^4 \cdot e}{e^T \cdot D^4 \cdot e} = (0.05882, 0.51261, 0.15971, 0.26886)$$

$$W^5 = \frac{D^5 \cdot e}{e^T \cdot D^5 \cdot e} = (0.05882, 0.51261, 0.15971, 0.26886)$$

ملاحظه می شود که همگرایی پروسه در مرحله پنجم رخ داده است . یعنی W^5 برابر W^4 شده است . بنابراین مشخص کننده بردار نهایی و تعیین کننده ی اوزان برای شاخص های موجود از مسأله مفروض میباشد .

روش های تقریبی :

ماتریس مقایسات زوجی روبرو را در نظر گرفته و به روش های تقریبی اوزان را بدست می آوریم .

۱-مجموع سطری :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 9 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ 4 & \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{مجموع عناصر هر سطر} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{61}{36} \\ 15 \\ \frac{29}{6} \\ \frac{15}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \text{تقسیم عناصر بر جمع آنها نرمالایز کردن} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.078 \\ 0.681 \\ 0.219 \\ 0.34 \end{bmatrix}$$

$$\sum = \frac{793}{36}$$

۲-مجموع ستونی :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 9 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ 4 & \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{مجموع عناصر هر ستون} \rightarrow (17, 1.944, 6.33, 3.75) \rightarrow \text{بردار معکوس} \rightarrow$$



$$\left(\frac{1}{17}, \frac{1}{1.944}, \frac{1}{6.33}, \frac{1}{3.75} \right)$$

$$\rightarrow \text{بردار نرمالیزه} \rightarrow (0.059, 0.514, 0.158, 0.267)$$

جمع کل: ۰/۹۹۸

$$\left[\frac{0.059}{0.998}, \frac{0.514}{0.998}, \frac{0.158}{0.998}, \frac{0.267}{0.998} \right] \Rightarrow [0.059, 0.515, 0.158, 0.268]$$

۳- میانگین حسابی (قبلاً نیز از این روش استفاده کردیم)

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 9 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ 4 & \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow (\text{نرمالایز کردن}) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{17} & \frac{2}{35} & \frac{1}{19} & \frac{1}{15} \\ \frac{9}{17} & \frac{18}{35} & \frac{9}{19} & \frac{8}{15} \\ \frac{3}{17} & \frac{6}{35} & \frac{3}{19} & \frac{2}{15} \\ \frac{4}{17} & \frac{9}{35} & \frac{6}{19} & \frac{4}{15} \end{bmatrix} \rightarrow \text{میانگین سطری} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.058 \\ 0.512 \\ 0.159 \\ 0.312 \end{bmatrix}$$

17 35 19 15
 18 3 4

۴- میانگین هندسی:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 9 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ 4 & \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{میانگین هندسی} \rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt[4]{(1)\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)} = 0.31 \\ \sqrt[4]{(1)(1)(3)(2)} = 2.71 \\ \sqrt[4]{(3)\left(\frac{1}{3}\right)(1)\left(\frac{1}{2}\right)} = 0.841 \\ \sqrt[4]{(4)\left(\frac{1}{2}\right)(2)(1)} = 1.41 \end{bmatrix} \rightarrow$$

جمع: ۵/۲۷۱

$$\rightarrow \text{تقسیم عناصر ستونها بر جمع ستون (نرمالایز کردن)} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{0.31}{5.271} = 0.06 \\ \frac{2.71}{5.271} = 0.514 \\ \frac{0.841}{5.271} = 0.16 \\ \frac{1.41}{5.271} = 0.268 \end{bmatrix}$$



نرخ ناسازگاری:

برای یک ماتریس مقایسه زوجی نرخ ناسازگاری بشرح زیر بدست می آید :

$$II = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1} \quad \text{تعداد شاخص ها: } n$$

(Inconsistency Index) شاخص ناسازگار

$$IR = \frac{II}{IRI} \quad \text{نرخ ناسازگاری (Index Rate)}$$

IRI: مقداری تصادفی است که از جدول اعداد تصادفی زیر بدست می آید :

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
۰	۰	۰/۵۸	۰/۹	۱/۱۲	۲/۳۴	۱/۳۲	۱/۴۱	۱/۴۵	۱/۵۱

↑
اعداد تصادفی

دیده میشود ماتریس مقایسات زوجی تا 2×2 حتماً سازگار است زیرا مقدار IRI برای آنها صفر است لذا $IR = \infty$ بنابراین نرخ ناسازگاری برای ماتریس های 3×3 به بالا مطرح است .

نکته : در صورتی که نرخ ناسازگاری بدست آمده (IR) کمتر از $0/1$ باشد می توان کار را ادامه داد و ماتریس مقایسه ی زوجی از طریق روش AHP قابل حل است . در غیر این صورت تصمیم گیرنده باید در ماتریس مقایسه ی زوجی تجدید نظر کند.

محاسبه نرخ ناسازگاری :

۱- تشکیل ماتریس مقایسه زوجی A

۲- بدست آوردن بردار وزن W

۳- بدست آوردن بزرگترین مقدار ویژه ماتریس مقایسه ی زوجی (بدست آوردن λ_{max})

۴- استفاده از فرمول $II = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$ ← شاخص سازگاری

۵- نرخ ناسازگاری: $IR = \frac{II}{IRI}$

نکته : چون بدست آوردن λ_{max} به روش اصولی ریاضی زمان بر است معمولاً آنرا به روش هایی تخمین می زنند . یکی از روشهای ای این قرار است :

۱- داریم $A.W = \lambda.W$ بنابراین با بدست آوردن A.W و تقسیم بر W میتوانیم λ ها را بدست آوریم .

۲- متوسط λ های بدست آمده را به عنوان λ_{max} به کار میبریم .

مثال: برای ماتریس مقایسه زوجی روبرو که در صفحه ی ۲۰ به روش میانگین حسابی برای آن W ها را حساب نمودیم نرخ ناسازگاری را بدست آورید .

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 9 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ 4 & \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{نرمالیز کردن و سپس میانگین حسابی} \rightarrow w = \begin{bmatrix} 0/058 \\ 0/512 \\ 0/159 \\ 0/312 \end{bmatrix} \Rightarrow A.W = \begin{bmatrix} 0/245 \\ 2/135 \\ 0/659 \\ 1/292 \end{bmatrix}$$

اکنون به روش تقریبی اعداد بدست آمده را تک تک بر مقادیر متناظر خود در ماتریس W تقسیم میکنیم و مقادیر ویژه را به دست میآوریم:

$$\lambda_1 = \frac{0/245}{0/058} = 4/224 \quad \lambda_2 = \frac{2/135}{0/512} = 4/169 \quad \lambda_3 = \frac{0/659}{0/159} = 4/144 \quad \lambda_4 = \frac{1/292}{0/312} = 4/141$$

اکنون میانگین مقادیر ویژه ی به دست آمده را به عنوان تخمین برای λ_{max} به کار می بریم .

$$\lambda_{max} = \frac{4.224 + 4.169 + 4.144 + 4.141}{4} = 4/169$$

اکنون نرخ ناسازگاری را حساب میکنیم:

$$II = \frac{\lambda_{max} - n}{n-1} = \frac{4/169 - 4}{3} = 0/056$$

بعد ماتریس

$$IR = \frac{II}{IRI} = \frac{0/056}{0/9} = 0/062 < 0/1 \Rightarrow \text{ماتریس سازگار است}$$

عدد تصادفی از جدول که برای $n = 4$ برابر $0/9$ است

روش محاسبه ی درخت سلسله مراتب تصمیم

مثال: می خواهیم از بین دو Laptop یکی را انتخاب کنیم . معیارهای انتخاب عبارتند از: سخت افزار خوب (H)، نرم افزار خوب (S) و باتری با کیفیت (B). ماتریس های مقایسات زوجی عبارتند از:

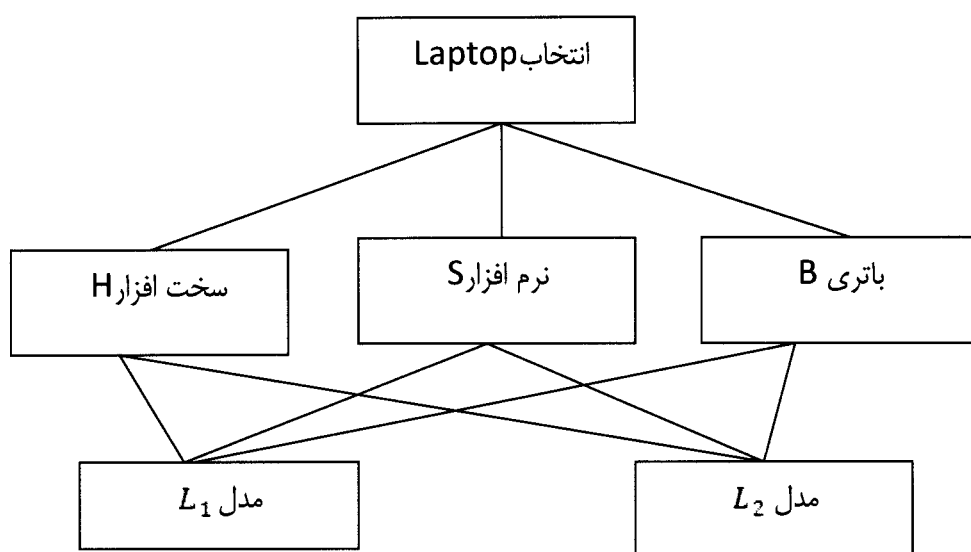
شاخص	L_1	L_2
H		
L_1	1	2
L_2	$\frac{1}{2}$	1

شاخص	L_1	L_2
S		
L_1	1	5
L_2	$\frac{1}{5}$	1

شاخص	L_1	L_2
B		
L_1	1	$\frac{1}{4}$
L_2	4	1



هدف تصمیم	H	S	B
H	1	$\frac{1}{2}$	1
S	2	1	3
B	1	$\frac{1}{3}$	1



در مرحله اول به کمک روش تقریبی میانگین حسابی وزنها را به دست می آوریم :

شاخص	L_1	L_2		شاخص	L_1	L_2	
H				H			
L_1	1	2	تقسیم هر عنصر بر جمع ستون (نرمالایز کردن)	L_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	متوسط سطری
L_2	$\frac{1}{2}$	1		L_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
Σ	$\frac{3}{2}$	3					

$$W_H = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

شاخص	L_1	L_2		شاخص	L_1	L_2	
S				S			
L_1	1	5	تقسیم هر عنصر بر جمع ستون (نرمالایز کردن)	L_1	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	متوسط سطری
L_2	$\frac{1}{5}$	1		L_2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	
Σ	$\frac{6}{5}$	6					

$$W_S = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

شاخص	L_1	L_2	تقسیم هر عنصر بر جمع ستون (نرمالایز کردن)	شاخص	L_1	L_2	متوسط سطری	$W_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$
B				B				
L_1	1	$\frac{1}{4}$	$\rightarrow$	L_1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\rightarrow$	
L_2	4	1		L_2	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$		
Σ	5	$\frac{5}{4}$						

هدف	H	S	B	تقسیم هر عنصر بر جمع ستون (نرمالایز کردن)	هدف	H	S	B	متوسط سطری	$W_L = \begin{bmatrix} 0.241 \\ 0.548 \\ 0.211 \end{bmatrix}$
H	1	$\frac{1}{2}$	1		H	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{5}$		
S	2	1	3	$\rightarrow$	S	$\frac{2}{4}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{3}{5}$	$\rightarrow$	
B	1	$\frac{1}{3}$	1		B	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{5}$		
Σ	4	$\frac{11}{6}$	5							

W_H	W_S	W_B
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

با داشتن وزن شاخصها در مدلها (W_H, W_S, W_B) و وزن خود شاخص ها نسبت به هم (W_L) میتوان وزن نهایی را بدست آورد:

$$\text{وزن نهایی} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.241 \\ 0.548 \\ 0.211 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.66 \\ 0.34 \end{bmatrix} = \begin{cases} W_{L_1} = 0.66 \\ W_{L_2} = 0.34 \end{cases}$$

اکنون نرخ ناسازگاری برای ماتریس هدف را بدست می آوریم . برای این منظور از روش تقریبی مقادیر ویژه بدست می آوریم .

$$D \times W = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.241 \\ 0.548 \\ 0.211 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.726 \\ 1.663 \\ 0.635 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{0.726}{0.241} = 3.012 \\ \lambda_2 = \frac{1.663}{0.548} = 3.035 \\ \lambda_3 = \frac{0.635}{0.211} = 3.01 \end{cases}$$



$$\lambda_{max} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{3} = \frac{3.012 + 3.035 + 3.01}{3} = 3.019$$

$$II_L = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1} = \frac{3.019 - 3}{3 - 1} = 0.0095, IRI_L = 0.58$$

به همین ترتیب برای ۳ ماتریس ۲×۲ مربوط به سخت افزار، نرم افزار و باتری که با D_H, D_S, D_B نشان می دهیم.

$$D_H \cdot W = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \lambda_{max} = 2$$

$$II_H = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1} = \frac{2 - 2}{1} = 0$$

به همین ترتیب برای D_S, D_B نیز خواهیم داشت: $I \cdot I_S = I \cdot I_B = 0$

بعلاوه برای ماتریس ۳×۳ خواهیم داشت: $I.R.I = 0.58$ و برای سه ماتریس ۲×۲ دیگر نیز $I.R.I = 0$

محاسبه شاخص ناسازگاری کل $\overline{II}$:

$$\overline{II} = I \cdot I_L + W_L \times \begin{bmatrix} II_H \\ II_S \\ II_B \end{bmatrix} \Rightarrow 0.0095 + [0.241 \quad 0.548 \quad 0.211] \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.0095$$

$$\overline{IRI} = IRI_L + W_L \times \begin{bmatrix} IRI_H \\ IRI_S \\ IRI_B \end{bmatrix} \Rightarrow 0.58 + [0.241 \quad 0.548 \quad 0.211] \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.58$$

محاسبه نرخ ناسازگاری نهایی $\overline{IR}$

$$\overline{IR} = \frac{\overline{II}}{\overline{IRI}} = \frac{0.0095}{0.58} = 0.016$$

چون $\overline{IR}$ کمتر از ۰/۱ است پس در این درخت سلسه مراتبی میران ناسازگاری قابل قبول است.

روش ANP (Analytic Network Process)

روش AHP زمانی قابل استفاده است که تشخیص ارجحیت شاخص ها نسبت به هم و تعیین وزن آنها به گزینه ها بستگی نداشته باشد و به همین ترتیب در هر سطح تعیین ارجحیات به عناصر سطوح پایین تر وابسته نباشد. در غیر این صورت روش AHP برای اینگونه مسائل که با AHP قابل حل نیست به کار می رود.

مثال: فرض کنید می خواهیم در یکی از چهار فرصت A_1, A_2, A_3, A_4 سرمایه گذاری کنیم. شاخص های تصمیم گیری عبارتند از مقادیر برگشت سرمایه در سال اول، سال دوم، سال سوم و سال چهارم (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) (با فرض عدم وجود نرخ تنزیل) جدول زیر نشان می دهد که بر اساس برگشت نسبی A_2 مناسب ترین گزینه است.

گزینه	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	مجموع برگشت	برگشت نسبی	رتبه
A_1	۱	۹	۱	۳	۱۴	۰/۲۰۰۰	۴
A_2	۹	۱	۹	۱	۲۰	۰/۲۸۵۷	۱
A_3	۸	۱	۴	۵	۱۸	۰/۲۵۷۱	۲
A_4	۴	۱	۸	۵	۱۸	۰/۲۵۷۱	۲

اکنون فرض کنید بر اساس روش ANP و استفاده از بردار ویژه (به روش نرمالیزه کردن ستون موجود از ماتریس تصمیم گیری و سپس استفاده از میانگین ردیفی) مسأله را حل کنید در اینصورت خواهیم داشت:

اوزان به ازای هر شاخص

گزینه	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	برگشت نسبی	رتبه
A_1	$\frac{1}{22}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{3}{14}$	۰/۲۶۴	۱
A_2	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{14}$	۰/۲۴۳	۴
A_3	$\frac{8}{22}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{22}$	$\frac{5}{14}$	۰/۲۴۶	۲
A_4	$\frac{4}{22}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{8}{22}$	$\frac{5}{14}$	۰/۲۴۶	۲



دیده می شود که در ارزیابی به روش AHP بر خلاف روش قبل رتبه ی A_1, A_2 عوض شده است . در این مسأله روش AHP جوابگو نیست زیرا باید میتوانستیم اوزان شاخص ها (سال) را مستقل از گزینه های سرمایه گذاری بدست آوریم ولی سالهای برگشت سرمایه بستگی به گزینه ی سرمایه گذاری دارند . برای روشن شدن بهتر مطلب و اینکه در این مسأله شاخص ها به گزینه ها وابستگی دارند فرض کنید A_1, A_2, A_3, A_4 را به جای گزینه به عنوان شاخص در نظر بگیریم و سالها را به عنوان گزینه .

اکنون این سوال را میپرسیم که : از نظر شاخص ها (A_i) حکم مشابهی بدهیم و بگوییم مثلاً برای همه ی A_i ها همیشه سال یکم دو برابر بهتر از سال دوم است ، A_i ها از سالها مستقل اند . ولی چنانچه به جدول اولیه مراجعه کنید می بینید که پاسخها بستگی به فرصت های سرمایه گذاری دارد و نمیتوان حکم واحدی را صادر نمود . در روش ANP چهار فرصت سرمایه گذاری میتوان دو ماتریس زیر را بدست آورد :

$$w_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 8 & 4 \\ \frac{14}{9} & \frac{20}{1} & \frac{18}{1} & \frac{18}{1} \\ \frac{14}{1} & \frac{20}{9} & \frac{18}{4} & \frac{18}{8} \\ \frac{14}{3} & \frac{20}{1} & \frac{18}{5} & \frac{18}{5} \\ \frac{14}{14} & \frac{20}{20} & \frac{18}{18} & \frac{18}{18} \end{bmatrix} \quad w_{2,1} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ \frac{22}{9} & \frac{12}{1} & \frac{22}{9} & \frac{14}{1} \\ \frac{22}{8} & \frac{12}{1} & \frac{22}{4} & \frac{14}{5} \\ \frac{22}{4} & \frac{12}{1} & \frac{22}{8} & \frac{14}{5} \\ \frac{22}{22} & \frac{12}{12} & \frac{22}{22} & \frac{14}{14} \end{bmatrix}$$

و بالاخره برای ماتریس نهایی داریم $W = \begin{bmatrix} W_{1,1} & W_{1,2} \\ W_{2,1} & W_{2,2} \end{bmatrix}$ یعنی سوپر ماتریس زیر :

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	A_1	A_2	A_3	A_4
Y_1	.	.	.	.	$\frac{1}{14}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{8}{18}$	$\frac{4}{18}$
Y_2	.	.	.	.	$\frac{9}{14}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
Y_3	.	.	.	.	$\frac{1}{14}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{8}{18}$
Y_4	.	.	.	.	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{18}$
A_1	$\frac{1}{22}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{3}{14}$	.	.	.	.
A_2	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{14}$	.	.	.	.
A_3	$\frac{8}{22}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{22}$	$\frac{5}{14}$	.	.	.	.
A_4	$\frac{4}{22}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{8}{22}$	$\frac{5}{14}$	.	.	.	.

در ادامه برای حل مسأله سوپر ماتریس بالا را آنقدر به توانهای فرد میرسانیم که در توالی های مختلف به توان رساندن مقادیر مشابهی تکرار شوند .



	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	A_1	A_2	A_3	A_4
Y_1	.	.	.	.	./3143	./3143	./3143	./3143
Y_2	.	.	.	.	./1714	./1714	./1714	./1714
Y_3	.	.	.	.	./3143	./3143	./3143	./3143
Y_4	.	.	.	.	./2000	./2000	./2000	./2000
A_1	./2	./2	./2	./2	.	.	.	.
A_2	./2857	./2857	./2857	./2857	.	.	.	.
A_3	./2571	./2571	./2571	./2571	.	.	.	.
A_4	./2571	./2571	./2571	./2571	.	.	.	.

اوزان کلی برای سالها بدین قرار است :

$$[W_{Y_1} \quad W_{Y_2} \quad W_{Y_3} \quad W_{Y_4}] = [0.3143 \quad 0.1714 \quad 0.3143 \quad 0.2000]$$

این اوزان با اوزان سالیانه زیر مطابقت دارد :

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	جمع
مجموع برگشت سالیانه	22	12	22	14	70
اوزان نرمالیزه شده	$\frac{22}{70}$ ↓ ./3143	$\frac{12}{70}$ ↓ ./1714	$\frac{22}{70}$ ↓ ./3143	$\frac{14}{70}$ ↓ ./2000	

بعلاوه از ماتریس نهایی بدست آمده ملاحظه میشود که اوزان برای گزینه ها عیناً مانند اوزان بدست آمده در روش حل ابتدایی است:

رتبه	اوزان
4	./2
1	./2857
2	./2571
2	./2571



روش Topsis (Technique for Order – Preference by Similarity to Ideal Solution)

مدل Topsis توسط هانگ دیون در سال ۱۹۸۱ ارائه شد. در این روش که یکی از بهترین مدل های تصمیم گیری چند شاخصه است نیز m گزینه توسط n شاخص ارزیابی می شود.

اساس این روش بر این مفهوم است که گزینه انتخابی باید :

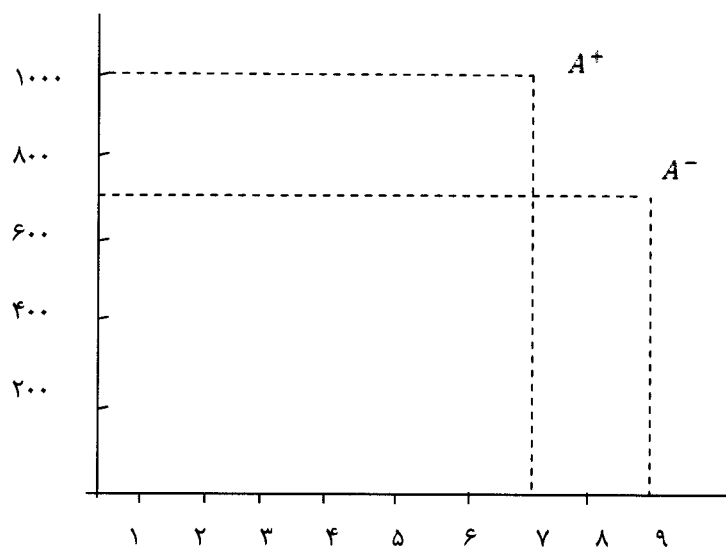
۱- کمترین فاصله را با راه حل ایده آل مثبت (بهترین حالت ممکن) داشته باشد.

۲- بیشترین فاصله را با راه حل ایده آل منفی (بدترین حالت ممکن) داشته باشد.

مثال ک فرض کنید می خواهیم از بین دو کالا با شاخص های C_1 و C_2 بهترین کالا را انتخاب کنیم.

	کالای A_1	کالای A_2
قیمت C_1	۱۰۰۰	قیمت: $C_2 = 700$
کیفیت C_2	(۹) بسیار خوب	(۷) خوب = کیفیت: C_2

این دو شاخص را روی محور مختصات مشخص و مقادیر را نشان می دهیم.

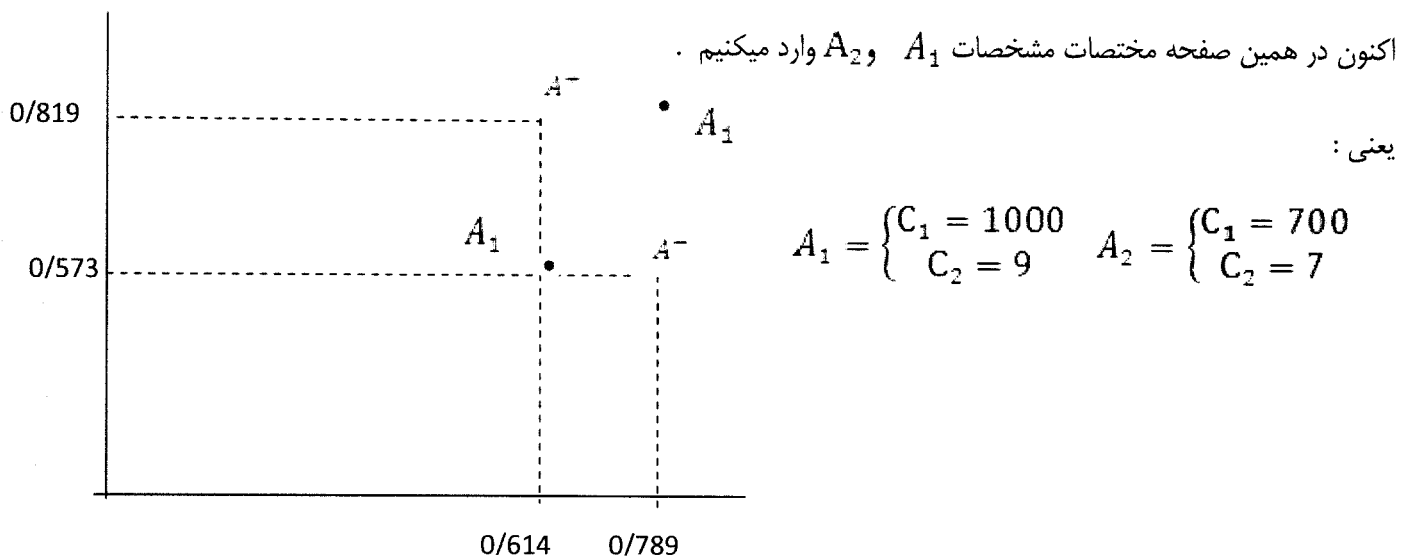


از دو کالای بالا بهترین شاخصها را انتخاب و به عنوان گزینه ی ایده آل مثبت در نظر می گیریم.

$$A^+ = \begin{cases} \text{قیمت} = 700 \\ \text{کیفیت} = 9 \end{cases}$$

به همین ترتیب بدترین مقادیر را برای گزینه ی ایده آل منفی انتخاب می کنیم.

$$A^- = \begin{cases} \text{قیمت} = 1000 \\ \text{کیفیت} = 70 \end{cases}$$



برای قضاوت باید مقادیر به روش نورم بی مقیاس شوند .

در کنار محورهای مختصات مقادیر بی مقیاس شده به روش نورم نمایش داده شده است . اکنون قضاوت میکنیم :

$$A^+ \text{ از } A_1 \text{ فاصله} = 0/819 - 0/537 = 0/282$$

$$A^- \text{ از } A_1 \text{ فاصله} = 0/789 - 0/614 = 0/175$$

$$A^+ \text{ از } A_2 \text{ فاصله} = 0/789 - 0/614 = 0/175$$

$$A^- \text{ از } A_2 \text{ فاصله} = 0/819 - 0/537 = 0/282$$

ملاحظه می شود که A_2 به A^+ نزدیک تر و به A^- دورتر است بنابراین گزینه A_2 انتخاب می شود.

مراحل روش Topsis

$$r_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m a_{ij}^2}} \text{ نرم سازی به روش نورم}$$

۲- وزن ها را در ستونهای شاخصهای مربوطه ضرب میکنیم (ضرب ماتریس بی مقیاس شده در ماتریس قطری وزن ها)

$$(V = N \times W_{n \times n})$$

۳- تعیین راه حل ایده آل مثبت و راه حل ایده آل منفی :

$$[\text{انتخاب بهترین مقادیر هر شاخص در ماتریس } V] = \text{راه حل ایده آل مثبت } (V^+)$$

$$[\text{انتخاب بهترین مقادیر هر شاخص در ماتریس } V] = \text{راه حل ایده آل منفی } (V^-)$$

نکته : " بهترین " مقادیر برای شاخص های مثبت ، بزرگترین مقادیر و برای شاخص های منفی : کوچک ترین مقادیر است و " بدترین " برای شاخص های مثبت ، کوچک ترین مقادیر و برای شاخص های منفی بزرگترین مقادیر است .

۱- بدست آوردن فاصله ی اقلیدسی هر گزینه تا ایده آل های مثبت و منفی :

$$d_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^n (V_{ij} - V_j^+)^2}, i = 1, 2, 3, \dots, m$$

فاصله از گزینه ی ایده آل مثبت

$$d_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^n (V_{ij} - V_j^-)^2}, i = 1, 2, 3, \dots, m$$

فاصله از گزینه ی ایده آل مثبت

۲- تعیین نزدیکی نسبی (Closeness: Cl) هر گزینه نسبت به راه حل ایده آل :

$$CL_i = \frac{d_i^-}{d_i^- + d_i^+}$$

توجه : چنانچه گزینه مورد نظر بر گزینه ی ایده آل منفی منطبق باشد در اینصورت $d_i^- = 0$ و در نتیجه داریم :

$$CL=0$$

اگر گزینه ی مورد نظر بر گزینه ی ایده آل مثبت منطبق باشد در اینصورت $d_i^+ = 0$ و در نتیجه : $CL=1$

پس $0 \leq CL \leq 1$ و هر چه CL یک گزینه به ۱ نزدیک تر باشد بهتر است .

۳- رتبه بندی گزینه ها : انتخاب گزینه ی با Cl بیشتر .

مثال از روش Topsis

فردی قصد دارد که یکی از خودرو های پراید ، پیکان و پژو را خریدی کند . خودرو های مورد نظر با چهار شاخص هزینه ، سرعت ، کیفیت خدمات پس از فروش و ضمانت ، ارزیابی میشوند . شاخص هزینه از نوع منفی و سه شاخص دیگر ، مثبت هستند و در ماتریس تصمیم نوع اتومبیل (راهکارها) به صورت A_i و شاخص های ، به صورت C_j نشان داده شده است . با روش Topsis گزینه ها را رتبه بندی کنید .

شاخص گزینه	(ضمانت) (خدمات پس از فروش) (سرعت) (هزینه)			
	C_1^-	C_2^+	C_3^+	C_4^+
A_1	5	8	13	4
A_2	4	10	9	2
A_3	8	12	6	3

گام ۱ : بی مقیاس سازی

شاخص گزینه	C_1^- C_2^+ C_3^+ C_4^+			
	C_1^-	C_2^+	C_3^+	C_4^+
A_1	۰/۴۴۸	۰/۴۵۶	۰/۷۶۹	۰/۷۴۳
A_2	۰/۳۹۰	۰/۵۷۰	۰/۵۳۲	۰/۳۷۱
A_3	۰/۷۸۱	۰/۶۸۴	۰/۳۵۵	۰/۵۵۷



$$N_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m a_{ij}^2}}$$

$$n_{11} = \frac{5}{\sqrt{5^2 + 4^2 + 8^2}} \quad \text{برای نمونه :}$$

گام ۲: برای بدست آوردن ماتریس بی مقیاس موزون، لازم است اوزان شاخص ها را داشته باشیم. برای این کار ابتدا به وسیله ی تکنیک آنتروپی شانون (یا روش های دیگر) اوزان شاخص ها را حساب می کنیم. این اوزان به روش آنتروپی به صورت زیر بدست می آیند:

	C_1	C_2	C_3	C_4	تقسیم هر عنصر ستون به جمع ستون (نرمالایز کردن)		C_1	C_2	C_3	C_4	$-\frac{1}{\ln 3} \sum p_i \ln p_i$
A_1	5	8	13	4	$\rightarrow$	A_1	0/294	0/267	0/464	0/444	$\rightarrow$
A_2	4	10	9	2		A_2	0/235	0/333	0/321	0/222	
A_3	8	12	6	3		A_3	0/471	0/400	0/214	0/333	

	C_1	C_2	C_3	C_4
E_j	0.960	0.988	0.956	0.965
$d_i = 1 - E_j$	0.04	0.012	0.044	0.035
W_j	0.305	0.092	0.336	0.267

با بدست آوردن وزن ها میتوان ماتریس بی مقیاس شده ی موزون را بدست آورد

	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄				C ₁	C ₂	C ₃	C ₄			
A ₁	0.448	0.456	0.769	0.743	×	0.305	*	*	*	A ₁	0.149	0.042	0.258	0.198
A ₂	0.39	0.57	0.532	0.371		0	0.092	*	*	A ₂	0.119	0.052	0.179	0.099
A ₃	0.781	0.684	0.355	0.557		0	0	0.336	0	A ₃	0.238	0.063	0.119	0.149
						0	0	0	0.267					

گام ۳: بدست آوردن ایده آل های مثبت و منفی برای هر شاخص

$$\text{ایده آل مثبت} = i^+ = [\min V_{i1}, \max V_{i2}, \max V_{i3}, \max V_{i4}]$$

$$\text{ایده آل منفی} = i^- = [\max V_{i1}, \min V_{i2}, \min V_{i3}, \min V_{i4}]$$

گام ۴: بدست آوردن فاصله ی هر گزینه از ایده آل مثبت و منفی:

$$\begin{cases} d_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^n (V_{ij} - V_i^+)^2} \\ d_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^n (V_{ij} - V_i^-)^2} \end{cases} \quad \forall j$$

برای مثال مورد بحث مقادیر عبارتند از :

$$\begin{cases} d_1^+ = \sqrt{(0/149 - 0/119)^2 + (0/042 - 0/063)^2 + (0/258 - 0/258)^2 + (0/198 - 0/198)^2} = 0/037 \\ d_2^+ = \sqrt{(0/119 - 0/119)^2 + (0/052 - 0/063)^2 + (0/179 - 0/258)^2 + (0/099 - 0/198)^2} = 0/127 \\ d_3^+ = \sqrt{(0/238 - 0/119)^2 + (0/063 - 0/063)^2 + (0/119 - 0/258)^2 + (0/149 - 0/198)^2} = 0/189 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1^- = \sqrt{(0/149 - 0/238)^2 + (0/042 - 0/042)^2 + (0/258 - 0/119)^2 + (0/198 - 0/099)^2} = 0/192 \\ d_2^- = \sqrt{(0/119 - 0/238)^2 + (0/052 - 0/042)^2 + (0/179 - 0/119)^2 + (0/099 - 0/099)^2} = 0/134 \\ d_3^- = \sqrt{(0/238 - 0/238)^2 + (0/063 - 0/042)^2 + (0/119 - 0/119)^2 + (0/149 - 0/099)^2} = 0/055 \end{cases}$$

گام ۵: محاسبه میزان نزدیکی نسبی هر گزینه به راه حل ایده آل :

$$CL_i = \frac{d_i^-}{d_i^- + d_i^+}$$

i	d_i^+	d_i^-
1	0/037	0/192
2	0/127	0/134
3	0/189	0/055

$$\begin{cases} CL_1 = \frac{d_1^-}{d_1^- + d_1^+} = \frac{0/192}{0/037 + 0/192} = 0/838 \\ CL_2 = \frac{d_2^-}{d_2^- + d_2^+} = \frac{0/134}{0/127 + 0/134} = 0/513 \\ CL_3 = \frac{d_3^-}{d_3^- + d_3^+} = \frac{0/055}{0/189 + 0/055} = 0/225 \end{cases}$$

گام ۶: با توجه به مقادیر CL ها ، رتبه بندی گزینه ها بشرح زیر است :

$$\begin{cases} 0/838 \rightarrow A_1 \\ 0/513 \rightarrow A_2 \\ 0/225 \rightarrow A_3 \end{cases}$$

روش جایگشت (Permutation)

در این روش تمام جایگشت های گزینه ها را نسبت به هم می نویسیم . در صورت داشتن m گزینه تعداد جایگشت های ممکن $m!$ خواهد بود .

سپس بر اساس دو مجموعه ی هماهنگ و نا هماهنگ یک ماتریس ایجاد میکنیم . سپس جمع اعداد بالای قطر اصلی منهای جمع اعداد زیر قطر اصلی را بدست می آوریم . این کار برای تک تک جایگشت ها انجام میگردد . نتیجه تفریق هر کدام که بیشتر بود به عنوان گزینه ی برتر انتخاب میشود .

این روش برای مسائل ۳ و ۴ گزینه ای مناسب است و اگر تعداد گزینه ها بیشتر بود به دلیل افزایش حجم عملیات این روش مناسب نیست .

مثال : فرض کنید ۳ گزینه A_1, A_2, A_3 داریم . در ۶ حالت مختلف ($m!$) میتوان تمام حالات ممکنه اولویت های A_1, A_2, A_3 نسبت به هم را بیان نمود . یعنی :

$$\begin{array}{lll} P_1 = \{A_1, A_2, A_3\} & P_3 = \{A_2, A_1, A_3\} & P_5 = \{A_3, A_1, A_2\} \\ P_2 = \{A_1, A_3, A_2\} & P_4 = \{A_2, A_3, A_1\} & P_6 = \{A_3, A_2, A_1\} \end{array}$$

مثال : ماتریس کمی شده ی روبرو را در نظر بگیرید . در این مسأله فرض بر اینست که اجرای یک پروژه ی سد سازی به وزارت خانه ای واگذار شده است . ۳ گروه پرسنل اجرایی خود وزارت خانه (A_1) ، پیمانکار داخلی (A_2) و پیمانکار خارجی (A_3) گزینه های قابل انتخاب برای اجرای پروژه هستند . کدام گزینه را انتخاب کنیم .

	(سختی کار)	(ظرفیت)	(وجهه ملی)	(استحکام)	(هزینه)
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
A_1	۱	۲۴۰۰۰	۹	۵	۳
A_2	۳	۲۵۰۰۰	۵	۷	۱/۲
A_3	۷	۳۲۰۰۰	۳	۹	۱/۵

با به کار گیری روش آنتروپی وزن های شاخص به صورت زیر بدست می آید:

$$W_1 = 0/179 \quad W_2 = 0/062 \quad W_3 = 0/211 \quad W_4 = 0/017 \quad W_5 = 0/531$$

اکنون فرض کنید می خواهیم پرموتاسیون p_2 را بدست آوریم : $P_2 = \{A_1, A_3, A_2\}$

برای این منظور ماتریس روبرو را تشکیل میدهم :

	A_1	A_2	A_3
A_1	-	0/742	
A_2			
A_3			

$$0/211 + 0/531 = 0/742$$

وزن سختی کار وزن وجهه ملی

در مجموع در دو مورد A_1 از A_3 بهتر است . وزن این دو مورد را با هم

جمع میکنیم . (وجهه ملی و سختی کار)

در هزینه A_1 به A_3 ارجحیت ندارد .

در استحکام A_3 از A_1 بهتر است .

در وجهه ملی A_1 بهتر از A_3 است .

در ظرفیت A_3 بهتر از A_1 است .

در سختی کار A_1 بهتر از A_3 است .

به همین ترتیب بقیه اعداد جدول را بدست می آوریم . مثلاً :

برتری A_1 به A_2 : $A_1 : A_2$ در وجهه ملی و سختی کار بر A_2 برتری دارد پس : $0/211 + 0/531 = 0/742$

برتری A_3 به A_1 : $A_3 : A_1$ در هزینه و استحکام و ظرفیت بر A_1 ترجیح دارد پس : $0/179 + 0/062 + 0/017 = 0/258$

برتری A_2 به A_3 : $A_2 : A_3$ در هزینه وجهه ملی و سختی کار بر A_3 ارجح است پس : $0/179 + 0/211 + 0/531 = 0/921$

	A_1	A_2	A_3
A_1	—	0/742	0/742
A_2	0/258	—	0/079
A_3	0/258	0/921	—

برتری A_3 به A_2 : $W_2 + W_4 = 0/062 + 0/017 = 0/079$

برتری A_1 به A_2 : $W_1 + W_2 + W_4 = 0/179 + 0/062 + 0/017 = 0/258$

با تکمیل شدن جدول ارجحیت این پروموتاسیون را بدست می آوریم :

$$T_2 = (\text{مجموع اعداد بالای قطر اصلی}) - (\text{مجموع اعداد پایین قطر اصلی})$$

$$= (0/742 + 0/742 + 0/079) - (0/258 + 0/258 + 0/921)$$

$$= 1/563 - 1/437 = 0/126$$

پروموتاسیون $P_3 = \{A_2, A_1, A_3\}$:

$$T_2 = 1/921 - 1/079 = 0/842$$

چون پروموتاسیون T_3 از T_2 بهتر است پس جایگشت P_3 از P_2 بهتر است .

تعیین اولویت گزینه های به صورت A_3, A_1, A_2 بهتر از اولویت A_2, A_3, A_1 است .

	A_1	A_2	A_3
A_1	—	0/258	0/921
A_2	0/742	—	0/742
A_3	0/258	0/079	—

پروموتاسیون $P_1 = \{A_1, A_2, A_3\}$:

$$T_1 = (0/742 + 0/742 + 0/921) - (0/285 + 0/285 + 0/079) \rightarrow T_1 = 1/81$$

مقدار T_1 از T_2 و T_3 بیشتر است پس پروموتاسیون P_1 از P_2 و P_3 بهتر است .

به همین ترتیب برای هر ۶ جایگشت همین مراحل را طی میکنیم . مقدار پروموتاسیون هر کدام که بیشتر شد ، جایگشت مربوطه بهترین خواهد بود .

روش ELECTRE1

مراحل این روش به قرار زیر است :

- ۱-مانند روش Topsis ماتریس تصمیم گیری را به روش نورم بی مقیاس می کنیم .
- ۲-مانند روش Topsis وزن ها را دخالت می دهیم .
- ۳-مانند روش پروموتاسیون مجموعه ی فرعی هماهنگ (عواملی که برترند) و مجموعه ی ناهماهنگ (عواملی که برتر نیستند) را تشکیل میدهیم .
- ۴-تشکیل ماتریس هماهنگی و مشخص نمودن معیار هماهنگی

$$\text{مجموع کل اعداد ماتریس} = \frac{\text{نوعی میانگین کل اعداد ماتریس : معیار هماهنگی}}{n(n-1)}$$

۵-تشکیل ماتریس ناهماهنگی

۶-بدست آوردن ماتریس هماهنگ مؤثر

۷-بدست آوردن ماتریس ناهماهنگ مؤثر

۸-بدست آوردن ماتریس کل و مؤثر

۹-حذف گزینه های کم جاذبه

در این روش به جای رتبه بندی گزینه ها از مفهوم جدیدی معروف به غیر رتبه ای استفاده میشود. یعنی کلیه گزینه ها با استفاده از مقایسات غیر رتبه ای ارزیابی می شوند و نهایتاً گزینه های غیر مؤثر حذف میشوند .

مثال : مسأله سدسازی را که در روش جایگشت (promutation) حل کردیم را در نظر بگیرید و به روش ELECTRE1 آنرا حل کنید .

	(هزینه)	(استحکام)	(وجهه ملی)	(ظرفیت)	(سختی کار)
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
A_1	۳	۵	۹	۲۴۰۰۰	۱
A_2	۱/۲	۷	۵	۲۵۰۰۰	۳
A_3	۱/۵	۹	۳	۳۲۰۰۰	۷
	X_1^-	X_2^+	X_3^-	X_4^+	X_5^-
A_1	۰/۸۴۲	۰/۴۰۲	۰/۸۳۹	۰/۵۰۹	۰/۱۳
A_2	۰/۳۳۷	۰/۵۶۲	۰/۴۶۶	۰/۵۳۰	۰/۳۹۰
A_3	۰/۴۲۱	۰/۷۲۳	۰/۲۸۰	۰/۶۷۸	۰/۹۱۱

$$W = \begin{bmatrix} 0/179 \\ 0/062 \\ 0/211 \\ 0/017 \\ 0/531 \end{bmatrix}$$

وزن از روش آنتروپی محاسبه شده است

ماتریس بی مقیاس شده به روش نورم چنین است :

$$n_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum a_{ij}^2}}$$



مرحله دوم: بدست آوردن ماتریس بی مقیاس موزون

$$V = N_D \times W_{n \times n} = \begin{bmatrix} 0/151 & 0/402 & 0/839 & 0/509 & 0/130 \\ 0/337 & 0/562 & 0/466 & 0/530 & 0/390 \\ 0/421 & 0/723 & 0/280 & 0/678 & 0/911 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0/179 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0/062 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0/211 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0/017 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0/531 \end{bmatrix}$$

		X_1^-	X_2^+	X_3^+	X_4^+	X_5^-
$V =$	A_1	0/842	0/402	0/839	0/509	0/130
	A_2	0/337	0/562	0/466	0/530	0/390
	A_3	0/421	0/723	0/280	0/678	0/911

مرحله سوم: مشخص نمودن مجموعه هماهنگی $D_{k,l}$ ، $S_{k,l}$:

$S_{1,2} = \{3, 5\} \rightarrow$ برتری گزینه ی 1 به 2 در شاخص سوم و پنجم است.

$S_{1,3} = \{3, 5\} \rightarrow$ برتری گزینه ی 1 به 3 در شاخص سوم و پنجم است.

$S_{2,1} = \{1, 2, 4\} \rightarrow$ برتری گزینه ی 2 به 1 در شاخص یک و دو است.

در شاخص در 4 هیچکدام بر دیگری ارجح نیست. به دلخواه ما 4 را در این مجموعه می آوریم. میتوانیم به جای اینجا آنرا در مجموعه ناهماهنگ قرار دهیم.

$S_{1,2} = \{1, 3, 5\} \rightarrow$ برتری گزینه ی 2 به 3 در شاخص های 1، 3، 5 است.

$S_{3,1} = \{1, 2, 4\} \rightarrow$ برتری گزینه ی 3 به 1 در شاخص های 1، 2، 4 است.

$S_{3,2} = \{2, 4\} \rightarrow$ برتری گزینه ی 3 به 2 در شاخص های 2، 4 است.

نکته:

۱- در شاخص های مثبت برتری به معنای داشتن ارزش بیشتر است و در شاخص های منفی برتری به معنای داشتن ارزش کمتر است.

۲- این مثال در کتاب دکتر اصغرپور نیز حل شده است ولی در اینجا شاخص پنجم را به جای سختی کار (که شاخص منفی است) راحتی کار در نظر گرفته (که شاخص مثبت است) بنابراین حل، با آن تفاوت دارد.

اکنون مجموعه ی ناهماهنگ را بدست می آوریم.

$D_{1,2} = \{1, 2, 4\} \rightarrow$ گزینه 1 بر 2 در شاخص های 1، 2، 4 ارجحیت ندارد.

توجه: در گزینه ۴ هیچکدام بر دیگری ارجحیت ندارد بنابراین به دلخواه آنرا در مجموعه ناهماهنگ آوردیم. ولی میتوانیم آنرا در مجموعه هماهنگ قرار دهیم.

گزینه 1 بر 3 در شاخص های 1، 2، 4 ارجحیت ندارد. $D_{1,3} = \{1, 2, 4\}$

گزینه 2 بر 1 در شاخص های 3، 5 ارجحیت ندارد. $D_{2,1} = \{3, 5\}$

گزینه 2 بر 3 در شاخص های 4، 2 ارجحیت ندارد. $D_{2,3} = \{2, 4\}$

گزینه 3 بر 1 در شاخص های 3، 5 ارجحیت ندارد. $D_{3,1} = \{3, 5\}$

گزینه 3 بر 2 در شاخص های 1، 3، 5 ارجحیت ندارد. $D_{1,2} = \{1, 3, 5\}$

نکته: دیده میشود که مجموعه ی $S_{k,l}$ ها، $D_{k,l}$ ها دو به دو باهم برابرند:

$$S_{1,2} = D_{2,1}$$

$$S_{2,1} = D_{1,2}$$

$$S_{3,1} = D_{1,3}$$

$$S_{1,3} = D_{3,1}$$

$$S_{2,3} = D_{3,2}$$

$$S_{3,2} = D_{2,3}$$

مرحله چهارم: محاسبه ماتریس هماهنگی

توجه داشته باشید که اوزان عبارتند از:

$$I = \begin{vmatrix} - & 0/742 & 0/742 \\ 0/258 & - & 0/921 \\ 0/258 & 0/079 & - \end{vmatrix}$$

$$W_1 = 0/179$$

$$W_2 = 0/062$$

$$W_3 = 0/211$$

$$W_4 = 0/017$$

$$W_5 = 0/531$$

عناصر ماتریس اینگونه به دست می آیند:

(وزن شاخص هایی که در $S_{1,2}$ قرار دارند را با هم جمع میکنیم)

$$I_{1,2} = \sum_{j \in S_{1,2}} W_j = W_3 + W_5 = 0/211 + 0/531 = 0/742$$

(وزن شاخصهایی که در $S_{1,3}$ قرار دارند را با هم جمع میکنیم)

$$I_{1,3} = \sum_{j \in S_{1,3}} W_j = W_3 + W_5 = 0/211 + 0/531 = 0/742$$

$$I_{2,1} = \sum_{j \in S_{2,1}} W_j = W_1 + W_2 + W_4 = 0/179 + 0/062 + 0/017 = 0/258$$

$$I_{2,3} = \sum_{j \in S_{2,3}} W_j = W_1 + W_3 + W_5 = 0/179 + 0/211 + 0/531 = 0/921$$

$$I_{3.1} = \sum_{j \in S_{3.1}} W_j = W_1 + W_2 + W_4 = 0/179 + 0/062 + 0/017 = 0/258$$

$$I_{3.2} = \sum_{j \in S_{3.2}} W_j = W_2 + W_4 = 0/062 + 0/017 = 0/079$$

مرحله پنجم: محاسبه ماتریس ناهمبستگی

$$N_{1.2} = \frac{\max_{j \in D_{1.2}} |V_{1j} - V_{2j}|}{\max_{j \in J} |V_{1j} - V_{2j}|} \rightarrow D_{1.2} = \{1, 2, 4\}$$

$$N_{1.2} = \frac{\max \{|V_{11} - V_{21}|, |V_{12} - V_{22}|, |V_{14} - V_{24}|\}}{\max \{|V_{11} - V_{21}|, |V_{12} - V_{22}|, |V_{13} - V_{23}|, |V_{14} - V_{24}|, |V_{15} - V_{25}|\}}$$

$$N_{1.2} = \frac{\max \{0/151 - 0/060, 0/025 - 0/035, 0/009 - 0/009\}}{\max \{0/151 - 0/060, 0/025 - 0/035, 0/177 - 0/098, 0/009 - 0/009, 0/069 - 0/027\}}$$

$$N_{1.2} = \frac{\max \{0/091, 0/01, 0\}}{\max \{0/091, 0/01, 0/079, 0, 0/138\}} = \frac{0/091}{0/138} = 0/659$$

$$N_{1.3} = \frac{\max \{|V_{11} - V_{31}|, |V_{12} - V_{32}|, |V_{14} - V_{34}|\}}{\max \{|V_{11} - V_{31}|, |V_{12} - V_{32}|, |V_{13} - V_{33}|, |V_{14} - V_{34}|, |V_{15} - V_{35}|\}}$$

$$N_{1.3} = \frac{\max \{0/151 - 0/075, 0/025 - 0/045, 0/009 - 0/011\}}{\max \{0/151 - 0/075, 0/025 - 0/045, 0/177 - 0/059, 0/009 - 0/011, 0/069 - 0/484\}}$$

$$N_{1.3} = \frac{\max \{0/076, 0/02, 0/002\}}{\max \{0/076, 0/02, 0/118, 0/002, 0/415\}} = \frac{0/076}{0/415} = 0/183$$

$$N_{1.4} = \frac{\max \{|V_{23} - V_{13}|, |V_{25} - V_{15}|\}}{\max \{|V_{21} - V_{11}|, |V_{22} - V_{12}|, |V_{23} - V_{13}|, |V_{24} - V_{14}|, |V_{25} - V_{15}|\}}$$

$$C = \frac{\max \{0/098 - 0/177, 0/207 - 0/069\}}{\max \{0/06 - 0/151, 0/035 - 0/025, 0/098 - 0/177, 0/009 - 0/009, 0/027 - 0/069\}}$$

$$N_{1.3} = \frac{\max \{0/079, 0/138\}}{\max \{0/091, 0/01, 0/097, 0, 0/138\}} = \frac{0/138}{0/138} = 1$$

$$N_{1.5} = \frac{\max \{|V_{22} - V_{32}|, |V_{24} - V_{34}|\}}{\max \{|V_{21} - V_{31}|, |V_{22} - V_{32}|, |V_{23} - V_{33}|, |V_{24} - V_{34}|, |V_{25} - V_{35}|\}}$$

$$N_{1.5} = \frac{\max \{0/035 - 0/045, 0/009 - 0/011\}}{\max \{0/06 - 0/075, 0/035 - 0/045, 0/098 - 0/059, 0/009 - 0/011, 0/207 - 0/484\}}$$

$$N_{1.5} = \frac{\max \{0/01, 0/002\}}{\max \{0/015, 0/01, 0/039, 0/002, 0/277\}} = \frac{0/01}{0/277} = 0/036$$

$$N_{I_{3,1}} = \frac{\max \{|V_{33} - V_{13}|, |V_{35} - V_{15}|\}}{\max \{|V_{31} - V_{11}|, |V_{32} - V_{12}|, |V_{33} - V_{13}|, |V_{34} - V_{14}|, |V_{35} - V_{15}|\}}$$

$$N_{I_{3,1}} = \frac{\max \{0/059 - 0/177, 0/484 - 0/069\}}{\max \{0/075 - 0/151, 0/045 - 0/023, 0/059 - 0/177, 0/011 - 0/09, 0/484 - 0/069\}}$$

$$N_{I_{3,1}} = \frac{\max \{0/118, 0/415\}}{\max \{0/076, 0/02, 0/118, 0/002, 0/415\}} = \frac{0/415}{0/415} = 1$$

$$N_{I_{3,2}} = \frac{\max \{|V_{31} - V_{21}|, |V_{33} - V_{23}|, |V_{35} - V_{25}|\}}{\max \{|V_{31} - V_{21}|, |V_{32} - V_{22}|, |V_{33} - V_{23}|, |V_{34} - V_{24}|, |V_{35} - V_{25}|\}}$$

$$N_{I_{3,2}} = \frac{\max \{0/075 - 0/06, 0/059 - 0/098, 0/484 - 0/207\}}{\max \{0/075 - 0/06, 0/045 - 0/035, 0/059 - 0/098, 0/011 - 0/009, 0/484 - 0/207\}}$$

$$N_{I_{3,2}} = \frac{\max \{0/015, 0/039, 0/277\}}{\max \{0/015, 0/01, 0/039, 0/002, 0/277\}} = \frac{0/277}{0/277} = 1$$

$$N_I = \begin{vmatrix} - & 0/659 & 0/183 \\ 1 & - & 0/036 \\ 1 & 1 & - \end{vmatrix}$$

مرحله ششم: مشخص نمودن ماتریس همهانگ مؤثر. برای این منظور ارزش های I_{KE} از ماتریس همهانگی باید نسبت به یک ارزش آستانه سنجیده شوند.

حد آستانه را با $\bar{I}$ نشان میدهم و به این صورت تعریف می شود.

$$\bar{I} = \frac{\text{مجموع درایه های ماتریس همهانگی}}{\text{تعداد درایه های ماتریس همهانگی}}$$

در مثال اخیر ماتریس همهانگی به صورت زیر بدست آمد:

$$N_I = \begin{vmatrix} - & 0/724 & 0/724 \\ 0/258 & - & 0/921 \\ 0/258 & 0/079 & - \end{vmatrix}$$

$$\bar{I} = \frac{0/742 + 0/742 + 0/258 + 0/921 + 0/258 + 0/079}{6}$$

$$\bar{I} = \frac{3}{6} = 0/5$$

به جای مقادیری که در ماتریس همهانگی بیشتر از $\bar{I} = 0/5$ هستند ۱ و به جای مقادیر کمتر صفر قرار میدهم:



$$\begin{cases} I_{KL} \geq \bar{I} \rightarrow F_{KL} = 1 \\ I_{KL} < \bar{I} \rightarrow F_{KL} = 0 \end{cases} \quad F = \begin{vmatrix} - & 1 & 1 \\ 0 & - & 1 \\ 0 & 0 & - \end{vmatrix}$$

مرحله هفتم: مشخص نمودن ماتریس ناهماهنگ مؤثر. برای این منظور نیز مانند مرحله ی ششم عناصر ماتریس ناهماهنگ باید نسبت به یک حد آستانه سنجیده شوند. این حد آستانه را با NI نشان میدهیم و به اینصورت تعریف میشود:

$$NI = \frac{\text{مجموع درایه های ماتریس ناهماهنگی}}{\text{تعداد درایه های ماتریس هماهنگی}}$$

$$\bar{NI} = \frac{0/659 + 0/183 + 1 + 0/036 + 1 + 1}{6} = 0/646$$

به جای مقادیری که در ماتریس ناهماهنگی بیشتر از $\bar{NI}=0/646$ هستند مقدار صفر (۰) و به جای مقادیر کمتر یک (۱) قرار میدهیم.

$$\begin{cases} NI_{KL} \geq \bar{NI} \rightarrow G_{KL} = 1 \\ NI_{KL} < \bar{NI} \rightarrow G_{KL} = 0 \end{cases} \quad G = \begin{vmatrix} - & 0 & 1 \\ 0 & - & 1 \\ 0 & 0 & - \end{vmatrix}$$

مرحله هشتم: مشخص نمودن ماتریس کلی H

$$h_{k,l} = f_{k,l} \times g_{k,l}$$

$$\begin{vmatrix} - & 1 & 1 \\ 0 & - & 1 \\ 0 & 0 & - \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} - & 0 & 1 \\ 0 & - & 1 \\ 0 & 0 & - \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} - & 0 & 1 \\ 0 & - & 1 \\ 0 & 0 & - \end{vmatrix}$$

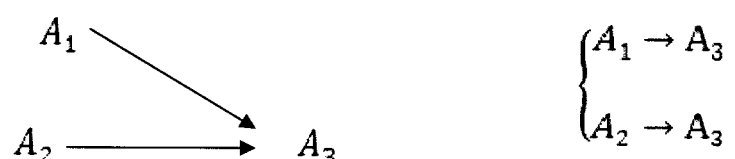
توجه کنید که ماتریس H حاصل ضرب ماتریس $F \times G$ نیست بلکه عناصر نظیر به نظیر در هم ضرب میشوند یعنی:

$$h_{1,1} = f_{1,1} \times g_{1,1} \quad h_{1,2} = f_{1,2} \times g_{1,2} \quad \dots \dots \dots$$

مرحله نهم: حذف گزینه های کم جاذبه:

ستون سوم که دارای ۱ است را حذف میکنیم.

روابط بین گزینه ها را از ماتریس H می توان به صورت زیر نشان داد:



دیده میشود که A_1 و A_2 از یک ارجحیت برخوردارند.

$$\begin{matrix} & A_1 & A_2 & A_3 \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{matrix} & \begin{vmatrix} - & \cdot & \setminus \\ \cdot & - & \setminus \\ \cdot & \cdot & - \end{vmatrix} \end{matrix}$$



در حقیقت ماتریس کلی H نشان دهنده ی ترتیب ارجحیت های نسبی گزینه هاست . بدان معنا که $h_{k,l} = 1$ نشان می دهد که A_k بر A_l از نظر معیار هماهنگی و هم از نظر معیار نا هماهنگی ارجح است . مثلاً :

$$\begin{cases} h_{1,3} = 1 \Rightarrow A_3 \text{ بر } A_1 \text{ ارجح است} \\ h_{2,3} = 1 \Rightarrow A_3 \text{ بر } A_2 \text{ ارجح است} \end{cases}$$

روش Promethee (Preference Ranking Organization Method Enrichment Evaluation)

در الکترا ارجحیت گزینه ها را نسبت به هم بررسی می کردیم و به اینکه هر گزینه نسبت به دیگری با چه فاصله ای ارجح است توجه نمی کردیم . مثلاً A_1 به A_2 ارجح است (با فاصله ۱۰۰۰) و A_2 به A_3 ارجح است (با فاصله ۷۰۰۰) در روش Promethee علاوه بر توجه به ارجحیت فاصله نیز لحاظ می شود .

این روش را طی مثال زیر دنبال می کنیم .

مثال : می خواهیم قطعه ی مورد نیاز خط تولید را از یکی از ۴ تأمین کننده ی موجود تهیه کنیم . برای این انتخاب ۵ شاخص را در نظر قرار می دهیم . بهترین تأمین کننده کدامیک است .

کیفیت	جریمه برگشت	توانایی تولید چند محصول	رضایت مشتری	زمان انتظار (روز)	
۵	٪۱۲	۲	۴۲	۱۵	تأمین کنندۀ (۱-یافته)
۷	٪۳	۴	۴۸	۱۷	تأمین کنندۀ (۲-یافته)
۹	٪۱	۳	۵۲	۱۶	تأمین کنندۀ (۳-یافته)
۵	٪۴	۱	۵۵	۱۴	تأمین کنندۀ (۴-یافته)

وزن شاخص
 $W =$ ها

$W_1=0/006$
$W_2=0/011$
$W_3=0/225$
$W_4=0/69$
$W_5=0/068$

در این روش تابع ارجحیت بر مبنای نظر خبرگان برای شاخص ها تعریف می شود .

اگر در زمان انتظار اختلاف دو گزینه کمتر از ۲ بود ارجحیتی وجود ندارد ولی اگر یکی بیش از ۲ روز زمان انتظارش کمتر از دیگری بود با ضریب ۱ ارجح است .

$$P_1(d_1) = \begin{cases} 0 & \text{for } d_1 < 2 \\ 1 & \text{for } d_1 \geq 2 \end{cases}$$

اگر اختلاف امتیاز رضایت مشتری در دو گزینه کمتر از ۶ باشد هیچکدام بر دیگری ارجح نیست اگر اختلاف بین ۶ و ۱۰ باشد آن که امتیاز بیشتری دارد با ضریب ۰/۵ ارجح است و اگر اختلاف بیش از ۱۰ باشد با ضریب ۱ ارجح است .

$$P_2(d_2) = \begin{cases} 0 & \text{for } d_2 < 6 \\ 0/5 & \text{for } 6 \leq d_2 < 10 \\ 1 & \text{for } d_2 \geq 10 \end{cases}$$

$$P_3(d_3) = \begin{cases} 0 & \text{for } d_3 < 2 \\ 1 & \text{for } d_3 \geq 2 \end{cases}$$

$$P_4(d_4) = \begin{cases} 0 & \text{for } d_4 < 4 \\ 1 & \text{for } d_4 \geq 4 \end{cases}$$

$$P_5(d_5) = \begin{cases} 0 & \text{for } d_5 < 2 \\ 1 & \text{for } d_5 \geq 2 \end{cases}$$

اکنون بر اساس تابع اولویت، شاخص ارجحیت تمام گزینه ها با مقایسات زوجی آنها را بدست می آوریم:

مقدار اولویت گزینه a به b که از تابع اولویت و بر اساس اختلاف مقدار شاخص در آن دو گزینه

مقداری است بین صفر و یک که نشان دهنده ی میزان ارجحیت گزینه a بر b با وزن مربوط به شاخص z در نظر گرفتن همه ی شاخص ها

$$\pi(a, b) = \sum_{j=1}^k W_j \times P_j(a, b)$$

گزینه اول منهای گزینه دوم در شاخص اول: $15-17=2$

گزینه اول منهای گزینه دوم در شاخص دوم

$$P_1(-2) = 0 \quad P_2(-6) = 0 \quad P_3(-2) = 0$$

$$A_2 \text{ به } A_1 \text{ ارجحیت} = 0/006 \times P_1(15-17) + 0/011 \times P_2(42-48) + 0/225 \times P_3(2-4) + 0/69 \times P_4(12-3) + 0/068 \times P_5(5-7) = 0 + 0 + 0 + 0/69 + 0 = 0/69$$

$$P_4(9) = 1 \quad P_5(-2) = 0$$

چون چهار گزینه داریم مقایسات زوجی ۱۶ حالت پیدا میکنند. که ۴ حالت آن مربوط به مقایسه ی هر گزینه با خودش است که انجام نمیدهیم. پس ۱۲ مقایسه زوجی انجام می شود. به عنوان مثالی دیگر از جحیت A_2 به A_1 را حساب میکنیم.

$$A_1 \text{ به } A_2 \text{ ارجحیت} = 0/006 \times P_1(17-15) + 0/011 \times P_2(48-42) + 0/225 \times P_3(4-2) + 0/69 \times P_4(3-12) + 0/068 \times P_5(7-5)$$

$$= 0/006 \times P_1(2) + 0/011 \times P_2(6) + 0/225 \times P_3(2) + 0/69 \times P_4(-9) + 0/068 \times P_5(2)$$

$$= 0/006 \times 1 + 0/011 \times 0/5 + 0/225 \times 1 + 0/69 \times 0 + 0/068 \times 1$$

$$= 0/006 + 0/0055 + 0/225 + 0 + 0/068 = 0/3045$$

کل اولویت بندی گزینه ها به روش ذکر شده در ماتریس زیر خواهیم داشت:

توجه کنید، مقادیر اولویت سطر به ستون را نشان میدهد.

	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	-	0/69	0/69	0/69
A_2	0/3045	-	0	0/229
A_3	0/079	0/068	-	0/229
A_4	0/011	0/0055	0	-

در مرحله بعد F^+ و F^- را تشکیل میدهم. F^+ جمع سطرها و F^- جمع ستونهای ماتریس بدست آمده است.



	A_1	A_2	A_3	A_4	F^+
A_1	-	0/69	0/69	0/69	2/07
A_2	0/3045	-	0	0/229	0/6035
A_3	0/079	0/068	-	0/229	0/446
A_4	0/011	0/0055	0	-	0/165
F^-	0/3945	0/7635	0/69	1/288	

از این جا به بعد به ۲ شیوه می توان رتبه بندی ایجاد کرد.

روش ۱ Promethee

	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	I	$A_1 P A_2$	$A_1 P A_3$	$A_1 P A_4$
A_2	-	I	$A_2 U A_3$	$A_2 P A_4$
A_3	-	$A_3 U A_2$	I	$A_3 P A_4$
A_4	-	-	-	I

$A_i P A_j$: ارجحیت A_i به A_j
 U : غیر قابل مقایسه (unprefeble)
 I : بی تفاوت
 $-$: غیر ارجح

در F^- مقدارش از مقدار A_2 کمتر است.

A_1 بر A_2 ارجح است چون هم در F^+ از A_2 مقدار بیشتری دارد و هم

$$\begin{cases} F^+_{(A_1)} = 2/07 > F^+_{(A_2)} = 0/6035 \\ F^-_{(A_1)} = 0/3945 > F^-_{(A_2)} = 0/7635 \end{cases}$$

A_1 بر A_3 ارجح است.

$$\begin{cases} F^+_{(A_1)} > F^+_{(A_3)} \\ F^-_{(A_1)} > F^-_{(A_3)} \end{cases}$$

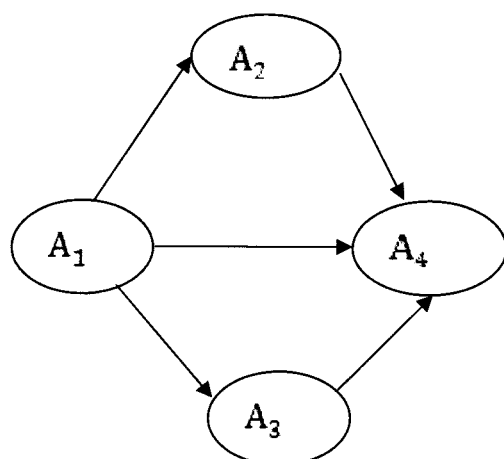
A_1 بر A_4 ارجح است.

$$\begin{cases} F^+_{(A_1)} > F^+_{(A_4)} \\ F^-_{(A_1)} > F^-_{(A_4)} \end{cases}$$

A_2 بر A_3 ترجیح دارد ولی در F^- ، A_3 بر A_2 غیر قابل مقایسه زیرا در F^+

$$\begin{cases} F^+_{(A_2)} > F^+_{(A_3)} \\ F^-_{(A_2)} > F^-_{(A_3)} \end{cases}$$

اکنون به توجه به ماتریس بدست آمده میتوان گراف اولویت ها را ترسیم کرد.



در گراف جهت دار گره ها گزینه ها را نشان میدهند و شاخه ی جهت دار از A_i به A_j نشان دهنده ی این است که گزینه ی i بر گزینه j ارجح است.

با توجه به گراف روبرو مشخص است که گزینه های A_4 و A_3 و A_2 سودمند نیستند زیرا A_4 به وسیله ی همه گزینه ها مغلوب می شود و گزینه های A_2 و A_3 نیز به وسیله ی A_1 مغلوب می شوند در نتیجه A_1 انتخاب می شود.

روش ۲ Promethee

در این روش که ساده تر است تفاضل F^+ و F^- برای هر گزینه را بدست می آوریم و سپس بر مبنای آن مقادیر گزینه ها را رتبه بندی می کنیم :

$$\left. \begin{aligned} F_{A_1} &= F^+_{(A_1)} - F^-_{(A_1)} = 2/07 - 0/3945 = 1/6755 \\ F_{A_2} &= F^+_{(A_2)} - F^-_{(A_2)} = 0/6035 - 0/7635 = -0/16 \\ F_{A_3} &= F^+_{(A_3)} - F^-_{(A_3)} = 0/446 - 0/69 = -0/244 \\ F_{A_4} &= F^+_{(A_4)} - F^-_{(A_4)} = 0/165 - 1/1234 = -1/123 \end{aligned} \right\} \Rightarrow F_{A_1} > F_{A_2} > F_{A_3} > F_{A_4}$$

در نتیجه اولویت بندی نهایی بدین قرار است :

$$A_1 \rightarrow 1 \text{ رتبه}$$

$$A_2 \rightarrow 2 \text{ رتبه}$$

$$A_3 \rightarrow 3 \text{ رتبه}$$

$$A_4 \rightarrow 4 \text{ رتبه}$$

نکته : از ویژگی های روش promethee این است که احتیاجی به بی مقیاس کردن ماتریس تصمیم گیری ندارد.



تخصیص به روش مجارستانی Hungarian Algorithm برای می نیم

این روش تخصیص ذاتاً می نیم سازی است . فرض کنید می خواهیم ۴ ماشین را به چهار کار تخصیص دهیم . در این مثال ۱۶ متغیر خواهیم داشت .

X_{41} : تخصیص ماشین ۴ به کار ۱		X_{21} : تخصیص ماشین ۲ به کار ۱	X_{11} : تخصیص ماشین ۱ به کار ۱
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
X_{41} : تخصیص ماشین ۴ به کار ۴		X_{24} : تخصیص ماشین ۲ به کار ۴	X_{14} : تخصیص ماشین ۱ به کار ۴

نکته اینست که مثلاً ماشین ۱ به کار ۱ اختصاص داده می شود یا نمی شود . و بقیه نیز به همین ترتیب ، بنابراین مسأله از جنس برنامه ریزی صفر و یک است .

دو دسته محدودیت برای این مسأله وجود دارد :

۱. محدودیت سطرها : هر ماشین به یکی از ۴ کار می توان تخصیص داد .
 ۲. محدودیت ستون ها : هر کار را به یکی از ۴ ماشین می توان تخصیص داد .
- ولی ما برای حل این مسأله از روش مجارستانی و برنامه ریزی صفر و یک استفاده می کنیم.

مراحل اجرای روش مجارستانی :

۱. کوچکترین عدد هر سطر را بقیه اعداد سطر کم کنید .
 ۲. کوچکترین عدد هر ستون را از بقیه اعداد ستون کم کنید .
 ۳. صفرهای بدست آمده را توسط حداقل خطوط افقی و یا عمودی پوشش می دهیم .
- اگر تعداد خطوط با بعد ماتریس (در مثال مورد بحث ۴) برابر بود می توانیم عمل تخصیص را انجام دهیم ولی اگر تعداد خطوط کمتر بود به مرحله بعد می رویم .
۴. کوچکترین عدد را انتخاب می کنیم و از اعدادی که رویشان خط نکشیده ایم کم میکنیم . و همین عدد را به اعداد گوشه ای اضافه می کنیم .
- اعداد گوشه ای : اعدادی هستند که رویشان ۲ بار خط کشیده شده است .
- اینک دیگر می توان عمل تخصیص را انجام داد .

تخصیص : به سطر و ستونی که یک صفر دارد نگاه میکنیم ابتدا تخصیص را آنجا انجام میدهیم سپس به سراغ سطر ۱ ستونی می رویم که دو صفر دارد . توجه کنید که صفر مشخص میکند که گزینه های مربوط به سطر و ستون آن صفر می توانند به هم اختصاص یابند .



مثال از روش تخصیص :

چهار فرد A ، B ، C ، D را می خواهیم به چهار شغل I ، II ، III ، IV تخصیص دهیم . جدول هزینه ی هر تخصیص رامشخص می کند . به روش مجارستانی مسأله را حل کنید :

	A	B	C	D
I	۸	۱۰	۱۷	۹
II	۳	۸	۵	۶
III	۱۰	۱۲	۱۱	۹
IV	۶	۱۳	۹	۷

کسر کوچکترین عدد هر سطر از بقیه :

	A	B	C	D
I	۰	۲	۹	۱
II	۰	۵	۲	۳
III	۱	۳	۲	۰
IV	۰	۷	۳	۱

کسر کوچکترین عدد هر ستون از بقیه :

	A	B	C	D
I	۰	۰	۷	۱
II	۰	۳	۰	۳
III	۱	۱	۰	۰
IV	۰	۵	۱	۱

با کمترین خطوط صفر ها را پوشش می دهیم .

	A	B	C	D
I	۰	۰	۷	۱
II	۰	۳	۰	۳
III	۱	۱	۰	۰
IV	۰	۵	۱	۱

دیده میشود به هر شیوه ای که بخواهیم صفر ها را با خطوط پوشش دهیم کمتر از ۴ خط نخواهیم داشت و چون بعد ماتریس هم ۴ است پس حل مسأله کامل است و کافی است عمل تخصیص را انجام دهیم .



$$\begin{cases} I = B & \text{توجه کنید به B فقط I را می توان اختصاص داد . پس از این تخصیص دیده} \\ II = C & \text{می شود که برای تخصیص IV فقط A را داریم . بعد از آن برای تخصیص} \\ IV = A & \text{C فقط II موجود است . و نهایتاً III را به D تخصیص می دهیم .} \\ III = D \end{cases}$$

به گونه ای دیگر نیز میتوان این تخصیص را انجام داد .

از سطر اول ماتریس شروع میکنیم . سطر ها را یک به یک مرور می کنیم . هر سطر که فقط یک صفر را در نظر گرفته و آن صفر را با یک مستطیل مشخص کنید . سپس روی صفرهای موجود در ستون مربوط به آن صفر را ضربدر بزنید . این کار را در تمام سطرها با یک صفر انجام دهید .

سپس همین فرایند را برای ستونها انجام دهیم . یعنی از ستون یک شروع می کنیم . ستونها را یک به یک مرور می کنیم و به هر ستون رسیدیم که فقط یک صفر دارد . آن صفر را با مستطیل مشخص کنید و بقیه صفرهای موجود در سطر مربوط به آن را ضربدر می زنیم . این کار باید آنقدر یابد تا تمام صفرها با مستطیل یا ضربدر پوشش داده شوند .

	A	B	C	D
I	×	0	7	1
II	×	3	0	3
III	1	1	×	0
IV	0	5	1	1

در مرحله اول دیه می شود در تقاطع سطر چهار و ستون اول یک صفر داریم که تنها صفر سطر چهارم است پس می توان به صورت آزمایشی IV را به A تخصیص داد لذا دیگر نمیتوان را به II و I داد به همین جهت روی صفرهای این ستون ضربدر می زنیم.

اکنون به سراغ ستون ها می رویم در ستون دوم یک صفر داریم که می تواند بیانگر تخصیص B به I باشد . به همین ترتیب در ستون چهارم یک صفر داریم که می تواند کاندیدا بودن تخصیص D به III را نشان دهید . پس در آنرا مستطیل می کشیم و دیگر صفر سطر مربوط به آن را ضربدر می زنیم .

اکنون دوباره به سراغ سطرها میرویم و می بینیم در سطر دوم یک صفر داریم که می تواند تخصیص C به II را نشان دهد .

پس تخصیص قطعی به صورت زیر است :

$$\begin{cases} IV = A \\ I = B \\ III = D \\ II = C \end{cases}$$

مثال : ۵ ماشین و ۵ شغل داریم . با توجه به ماتریس هزینه بهترین تخصیص را انجام دهید .

	I	II	III	IV	V
A	۶	۱۲	۳	۱۱	۱۵
B	۴	۲	۷	۱	۱۰
C	۸	۱۱	۱۰	۷	۱۱
D	۱۶	۱۹	۱۲	۲۳	۲۱
E	۹	۵	۷	۶	۱۰

کسر کوچکترین عدد هر سطر از بقیه :

	I	II	III	IV	V
A	۳	۹	۰	۸	۱۲
B	۳	۱	۶	۰	۹
C	۱	۴	۳	۰	۴
D	۴	۷	۰	۱۱	۹
E	۴	۰	۲	۱	۵

کسر کوچک ترین عدد هر ستون از بقیه :

	I	II	III	IV	V
A	۲	۹	۰	۸	۸
B	۲	۱	۶	۰	۵
C	۰	۴	۳	۰	۰
D	۳	۷	۰	۱۱	۵
E	۳	۰	۲	۱	۱

دیده میشود که با کمترین خط (۴ خط) تمام صفرها پوشش داده شد ولی بعد ماتریس ۵ است . پس در این مرحله نمیتوان تخصیص را انجام داد . بنابر این باید مرحله ی زیر را انجام دهیم :

	I	II	III	IV	V
A	۱	۸	۰	۸	۷
B	۱	۰	۶	۰	۴
C	۰	۴	۴	۱	۰
D	۲	۶	۰	۱۱	۴
E	۳	۰	۳	۲	۱

کوچکترین عدد را انتخاب کنید و از اعدادی که رویشان خط کشیده نشده کم کنید. و به اعداد گوشه ای اضافه کنید کوچک ترین عدد ۱ است .

عدد ۱ را از تمام اعدادی که رویشان خط کشیده نشده کم کنید و عدد ۱ را به تمام اعدادی که در محل تقاطع در خط هستند اضافه کنید .

اکنون مجدداً تخصیص را انجام می دهیم .

	I	II	III	IV	V
A	۱	۸	۰	۸	۷
B	۱	۰	۶	۰	۴
C	۰	۴	۴	۱	۰
D	۲	۶	۰	۱۱	۴
E	۳	۰	۳	۲	۱

مجدداً دیده میشود با چهار خط صفرها پوشش داده شده اند چون بعد ماتریس ۵ است باید دوباره مرحله ی اخیر را تکرار کنیم .



	I	II	III	IV	V
A	۰	۷	۰	۷	۶
B	۱	۰	۷	۰	۴
C	۰	۴	۵	۱	۰
D	۱	۵	۰	۱۰	۳
E	۳	۰	۴	۲	۱

کوچکترین عدد پوشش داده نشده مجدداً ۱ است. آنرا از اعداد پوشش داده نشده پوشش داده نشده کم میکنیم و به محل تقاطع ۲ خط اضافه می کنیم.

	I	II	III	IV	V
A	۰	۷	۰	۷	۶
B	۱	۰	۷	۰	۴
C	۰	۴	۵	۱	۰
D	۱	۵	۰	۱۰	۳
E	۳	۰	۴	۲	۱

اکنون مشاهده می شود که با ۵ خط می توانیم صفرها را پوشش دهیم. پس می توانیم تخصیص نهایی را انجام دهیم.

مراحل تخصیص سطری و سپس ستونی که به ترتیب شماره در شکل مشخص شده است را میبینید.

	I	II	III	IV	V
A	۰	۷	×	۷	۶
B	۱	×	۷	۰	۴
C	×	۴	۵	۱	۰
D	۱	۵	۱	۱۰	۳
E	۳	۰	۴	۲	۱

$$\begin{cases} I = A \\ IV = B \\ III = D \\ V = C \\ II = E \end{cases}$$

تخصیص به روش مجارستانی برای ماکزیم

فرض کنید در مسأله تخصیص معیار حداکثر کردن باشد. مثلاً در مسأله قبل که به روش مجارستانی حل کردیم اعداد جدول هزینه های تخصیص بودند و لذا روش به کار رفته تخصیص را به ما داد که موجب حداقل شدن می شود. اما اگر آن اعداد سود حاصل از تخصیص افراد به شغل ها باشد. باید تخصیص به روشی صورت گیرد که بیشترین سود حاصل گردد.

اما همانگونه که گفته شد روش مجارستانی ذاتاً برای می نیم سازی به کار می رود اما با استفاده از تکنیک زیر ماکزیم سازی را به می نیم سازی تبدیل می کنیم.

تبدیل مسأله از ماکزیم سازی به می نیم سازی برای استفاده از روش مجارستانی :

روشی که معمولاً به کار برده میشود این است که تماس اعداد هر ستون را از بزرگترین عدد آن ستون کم میکنیم و آنگاه از روش مجارستانی استفاده می کنیم.

مثال : فرض کنید می خواهیم سه فرد را به سه شغل تخصیص دهیم. جدول زیر سود حاصل از تخصیص ها را نشان میدهد بهترین تخصیص کدام است ؟



	A	B	C
I	۲۱	۱۶	۱۳
II	۱۹	۱۳	۱۷
III	۲	۱۶	۱۲

چون مسأله باید به گونه ای حل شود که تخصیص نهایی موجب حاصل شدن بیشترین سود گردد نمی توان مستقیماً در روش مجارستانی کمک گرفت . لذا ابتدا اعداد هر ستون را از ماکزیمم مقدار آن ستون کم می کنیم .

	A	B	C
I	۰	۰	۴
II	۲	۳	۰
III	۱۹	۰	۵

اینک چنانچه جدول روبرو به روش مجارستانی حل کنیم تخصیص نهایی شغل به افراد باعث می نیمم شدن جدول روبرو و ماکزیمم شدن جدول بالا می گردد .

$$\begin{cases} C = II \\ B = III \\ A = I \end{cases}$$

نکته : برای حل به روش مجارستانی باید تعداد سطرها و ستونها مساوی باشند . اگر اینگونه نبود به صورت مجازی سطر و یا ستون که مقادیرشان صفر است را به جدول اضافه می کنیم تا تعداد سطر و ستون ها مساوی شوند .

تخصیص خطی Linear Assignment

این روش از روش های رتبه ای در تصمیم گیری است و مانند روش Promethee احتیاجی به بی مقیاس کردن ندارد. مراحل حل به این روش به قرار زیر است:

شاخص رتبه	x_1	x_2	x_3
اولین	A_1	A_1	A_2
دومین	A_2	A_3	A_1
سومین	A_3	A_2	A_3
	اولین رتبه	دومین رتبه	سومین رتبه
A_1	2	1	0
A_2	1	1	1
A_3	0	1	2

مرحله یک: رتبه هر گزینه را به ازای هر یک از شاخص های موجود مشخص نمایید. در جدول روبرو مشخص است که به ازای شاخص x_1 گزینه A_1 اول، A_2 دوم و A_3 سوم است و مثلاً به ازای شاخص x_3 گزینه A_2 اول، A_1 دوم و A_3 سوم است.

مرحله دوم: در این مرحله تعداد دفعات رتبه های اخذ شده توسط گزینه ها را مشخص می کنیم. بعنوان مثال گزینه A_1 دو بار رتبه اول و یک بار رتبه دوم را کسب کرده و هیچوقت سوم نبوده است.

مرحله سوم: در این مرحله به جای مقادیر ماتریس قبل وزن شاخص ها را قرار می دهیم. فرض کنید داریم: $w = \{0.1 \ 0.4 \ 0.5\}$

	اولین رتبه	دومین رتبه	سومین رتبه
A_1	$w_1 + w_2 = 0.1 + 0.4$	$w_3 = 0.5$	0
A_2	$w_3 = 0.5$	$w_1 = 0.1$	$w_2 = 0.4$
A_3	0	$w_2 = 0.4$	$w_1 + w_3 = 0.1 + 0.5$

گزینه A_1 دو بار اول شده یکی به ازای شاخص اول (با وزن 0.1) و دیگری به ازای شاخص دوم (با وزن 0.4)

گزینه A_3 دو بار سوم شده یکی به ازای شاخص اول (با وزن 0.1) و دیگری به ازای شاخص سوم (با وزن 0.5)

رتبه گزینه	۱	۲	۳
A_1	0.5	0.5	0
A_2	0.5	0.1	0.4
A_3	0	0.4	0.6

بنابراین به صورت خلاصه ماتریس اوزان به شکل روبرو خواهد بود:

اکنون در ادامه به روش حداکثر مجارستانی حل می کنیم. توجه کنید که اعداد داخل ماتریس از جنس وزن هستند. بنابراین هر گزینه که وزن بیشتری داشته باشد ارزش بالاتری دارد. بنابراین باید تخصیص به روش حداکثر صورت گیرد.

رتبه گزینه	۱	۲	۳	مقادیر هر ستون را از حداکثر مقدار آن سطر کم می کنیم	رتبه گزینه	۱	۲	۳
A_1	۰.۵	۰.۵	۰	دیده می شود که صفرها با سه خط پوشش داده می شوند پس مستقیماً می توان تخصیص را انجام داد:	A_1	۰	۰	۰.۶
A_2	۰.۵	۰.۱	۰.۴		A_2	۰	۰.۴	۰.۲
A_3	۰	۰.۴	۰.۶		A_3	۰.۵	۰.۱	۰

رتبه گزینه	۱	۲	۳
A_1	۰	۰.۶	۰.۶
A_2	۰	۰.۴	۰.۲
A_3	۰.۵	۰.۱	۰

اولین تخصیص در سطر سوم که یک صفر داریم: $A_3 \rightarrow 3$

دومین تخصیص در ستون دوم که یک صفر داریم: $A_2 \rightarrow 2$

و نهایتاً تخصیص سوم در ستون اول اتفاق می افتد: $A_1 \rightarrow 1$

مثال دیگر: در این مثال گزینه X_5 مثبت فرض شده در حالی که در روش های قبلی این مسأله را با فرض منفی بودن X_5 حل کردیم.

(هزینه)	x_1^-	x_2^+	x_3^+	x_4^+	x_5^+
A_1	۳	۵	۹	۲۴۰۰۰	۱
A_2	۱/۲	۷	۵	۲۵۰۰۰	۳
A_3	۱/۵	۹	۳	۳۲۰۰۰	۷

	x_1^-	x_2^+	x_3^+	x_4^+	x_5^+
A_1	۱	۳	۱	۳	۳
A_2	۲	۲	۲	۲	۱
A_3	۳	۱	۳	۱	۲

به این صورت جدول زیر را تشکیل می دهیم که روبروی هر گزینه رتبه اش را در زیر شاخص مربوطه می نویسیم:

در شاخص x_1
 A_1 سوم شده
است

در شاخص x_5
 A_2 دوم شده
است

در مرحله بعد باید وزن ها را دخالت دهیم. فرض کنید اوزان شاخص ها به روش آنتروپی به صورت زیر بدست آمده است:

$$w = [0.179 \quad 0.062 \quad 0.211 \quad 0.017 \quad 0.531]$$

با دخالت دادن وزن ها داریم:



رتبه / شاخص	۱	۲	۳
A_1	W_3	0	$W_1 + W_2 + W_4 + W_5$
A_2	W_1	$W_2 + W_3 + W_4 + W_5$	0
A_3	$W_2 + W_4 + W_5$	W_1	W_3

→ A_1 به ازای X_1, X_2, X_4 و X_5 چهار بار سوم شده است.

مقادیر اوزان را جایگزین می کنیم:

رتبه / شاخص	۱	۲	۳
A_1	۰.۲۱۱	۰	۰.۷۸۹
A_2	۰.۱۷۹	۰.۸۲۱	۰
A_3	۰.۶۱	۰.۱۷۹	۰.۲۱۱

اینک مقادیر هر ستون را از حداکثر مقدار ستون کم می کنیم تا بتوانیم به روش مجارستانی آن را حل کنیم.

چون صفرها با سه خط پوشش داده می شوند و ماتریس نیز 3×3 است، پس می توان تخصیص را انجام داد:

رتبه / شاخص	۱	۲	۳
A_1	۰.۳۹۹	۰.۸۲۱	۰
A_2	۰.۴۳۱	۰	۰.۷۸۹
A_3	۰	۰.۶۴۲	۰.۵۷۸

 $A_3 \rightarrow 1$ $A_2 \rightarrow 2$ $A_1 \rightarrow 3$

رتبه	$X_1(w_1)$	نکته: ممکن است در روش تخصیص خطی در رتبه بندی گزینه ها به ازای یک شاخص دو گزینه هم رتبه شوند.
اولین	A_1, A_2	برای آن که بتوانیم شیوه های تخصیص خطی را به شرحی که گذشت دنبال کنیم به صورت زیر
دومین	-	جدول را تغییر می دهیم:
سومین	A_3	



رتبه	$X_{1,1}(\frac{W_1}{2})$	$X_{1,2}(\frac{W_1}{2})$	یعنی شاخص X_1 را به دو شاخص $X_{1,1}$ و $X_{1,2}$ تبدیل می کنیم که وزن هر کدام نصف وزن X_1 است. آن گاه یک بار گزینه A_1 نسبت به شاخص $X_{1,1}$ اول و A_2 دوم است و یک بار هم گزینه A_2 نسبت به شاخص $X_{1,2}$ اول و گزینه A_1 دوم است.
اولین	A_1	A_2	
دومین	A_2	A_1	
سومین	A_3	A_3	



تصمیم گیری گروهی

در تصمیم گیری گروهی به جای فرد گروه بر اساس شاخص ها تصمیم گیری می کند.

روش بردا:

فرض کنید پنج گزینه ($m=5$) به ازای سه شاخص ($n=3$) توسط یک گروه ۶ نفره ($k=6$) از خبرگان رتبه بندی می شود. نتایج رتبه بندی تک تک خبرگان به قرار زیر است:

هر فرد خبره یک ماتریس تصمیم گیری به ما می دهند.

$$D^1 = \begin{matrix} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$D^2 = \begin{matrix} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$D^3 = \begin{matrix} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$D^4 = \begin{matrix} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$D^5 = \begin{matrix} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$D^6 = \begin{matrix} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

اکنون در یک جدول برای شاخص X_i رتبه بندی نظر خبرگان را می نویسیم. مثلاً برای شاخص X_1 داریم:

X_1	D^1	D^2	D^3	D^4	D^5	D^6
A_1	۵	۳	۳	۴	۴	۱
A_2	۲	۲	۱	۲	۱	۳
A_3	۳	۵	۵	۵	۵	۵
A_4	۴	۴	۴	۳	۳	۴
A_5	۱	۱	۲	۱	۲	۲

هر ستون جدول روبرو متعلق به ستون اول هریک از ۶ ماتریس بالاست.

دو ماتریس مشابه دیگر نیز به ازای X_2 و X_3 می توان تشکیل داد.

در این مرحله به جای مقادیر عدد بردا می گذاریم. بدین طریق که بزرگترین عدد جدول را پیدا می کنیم و تمام اعداد را از آن کم می کنیم. پروفیسور بردا بدین شیوه مقیاس رتبه ای را به گونه ای از مقیاس نسبی تبدیل کرده و عمل جمع پذیری را میسر کرده است.

X_1	D^1	D^2	D^3	D^4	D^5	D^6	بزرگترین عدد جدول قبل ۵ است. جدول روبرو حاصل کم کردن اعداد آن جدول از عدد ۵ است:
A_1	۰	۲	۲	۱	۱	۴	
A_2	۳	۳	۴	۳	۴	۲	
A_3	۲	۰	۰	۰	۰	۰	به همین ترتیب چنین جدولی برای شاخص های X_2 و X_3 نیز بدست می آید.
A_4	۱	۱	۱	۲	۲	۱	
A_5	۴	۴	۳	۴	۳	۳	اکنون به صورت سطری اعداد را با هم جمع می کنیم. توجه کنید که دیگر با روشی که در مرحله پیش در نظر گرفتیم مقیاس از رتبه ای به نسبی تغییر کرده، در نتیجه به کار بردن عمل جمع روی اعداد جایز است:

	نظر خبرگان در مورد گزینه ها		X_1
	به ازای شاخص X_1		
A_1	$۰+۲+۲+۱+۱+۴=۱۰$	$\longrightarrow$	A_1 ۳
A_2	$۳+۳+۴+۳+۴+۲=۱۹$		A_2 ۲
A_3	$۲+۰+۰+۰+۰+۰=۲$		A_3 ۵
A_4	$۱+۱+۱+۲+۲+۱=۸$		A_4 ۴
A_5	$۴+۴+۳+۴+۳+۳=۲۱$		A_5 ۱

به طریق مشابه، رتبه مورد توافق گروهی برای X_2 و X_3 را می توان بدست آورد که به قرار زیر است:

	X_2		X_3
A_1	۳	A_1	۴
A_2	۱	A_2	۱
A_3	(۴و۵)	A_3	۵
A_4	(۴و۵)	A_4	۳
A_5	۲	A_5	۲

دیده می شود که عدد بردا برای A_3 و A_4 به ازای شاخص X_2 برابر بوده و در نتیجه همرتبه اند. بعداً خواهیم گفت که برای حل مشکل چه باید کرد.



	X ₁	X ₂	X ₃
A ₁	۳	۳	۴
A ₂	۲	۱	۱
A ₃	۵	(۴و۵)	۵
A ₄	۴	(۴و۵)	۳
A ₅	۱	۲	۲

اکنون می توان ماتریس رتبه بندی گزینه ها بر اساس شاخص های گوناگون که به صورت گروهی تعیین شده اند را به صورت روبرو تشکیل داد:

اکنون فرض کنید برای اوزان شاخص ها داریم:

$$W = \quad W_1=0.2 \quad W_2=0.3 \quad W_3=0.5$$

رتبه / گزینه	۱	۲	۳	۴	۵
A ₁	۰	۰	W_1+W_2	W_3	۰
A ₂	W_2+W_2	W_1	۰	۰	۰
A ₃	۰	۰	۰	$\frac{1}{2}W_2$	$W_1+\frac{1}{2}W_2+W_3$
A ₄	۰	۰	W_3	$W_1+\frac{1}{2}W_2$	$\frac{1}{2}W_2$
A ₅	W_1	W_2+W_3	۰	۰	۰

در مرحله قبلی ماتریس توافق گروهی از رتبه ها را بدست آوردیم. اینک ماتریس وزین توافق گروهی را بدست می آوریم. برای پر کردن اعداد جدول به کمک ماتریس توافق گروهی از رتبه ها چنین عمل می کنیم:

در جدول قبل دیده می شود که گزینه A₁ هیچکدام اول نشده است. پس مقدار آن در

جدول صفر خواهد بود. به همین ترتیب هیچگاه دوم نبوده است پس مقدار آن صفر است. ولی ۲ بار سوم بوده است. یک بار به ازای شاخص X₁ و یک بار شاخص X₂ پس وزن این دو شاخص را در تقاطع A₁ و ۳ در جدول باهم جمع می کنیم. در ادامه A₁ یک بار به ازای شاخص X₃ چهارم شده است که در جدول در تقاطع A₁ و ۴ قرار می دهیم W₃ و هیچگاه پنجم نبوده است.

توجه کنید که A₃ و A₄ به ازای شاخص X₂ هم رتبه اند و مشخص نیست کدام چهارم و کدام پنجم اند. در چنین حالتی در

رتبه / گزینه	۱	۲	۳	۴	۵
A ₁	۰	۰	۰.۵	۰.۵	۰
A ₂	۰.۸	۰.۲	۰	۰	۰
A ₃	۰	۰	۰	۰.۱۵	۰.۸۵
A ₄	۰	۰	۰.۵	۰.۳۵	۰.۱۵
A ₅	۰.۲	۰.۸	۰	۰	۰

موقع وزن دهی نیمی از وزن را به هر کدام اختصاص می دهیم. مثلاً A₃ هیچگاه اول و دوم و سوم نبوده است که به جای آن ها در جدول صفر قرار داده شده است. ولی یکبار مشترکاً با A₄ به ازای شاخص X₂ در رتبه چهارم قرار گرفته است پس در جدول در تقاطع A₃ و ۴ قرار می دهیم: $\frac{1}{2}W_2$. به همین ترتیب

سه بار A₃ در رتبه پنجم قرار گرفته که یک بار آن به صورت مشترک با A₄ به ازای گزینه X₂ بوده است پس در جدول قرار

می دهیم: $W_1 + \frac{1}{2}W_2 + W_3$. با قرار دادن مقادیر اوزان ماتریس وزین توافق گروهی رتبه بندی گزینه ها به صورت روبرو بدست می آید.

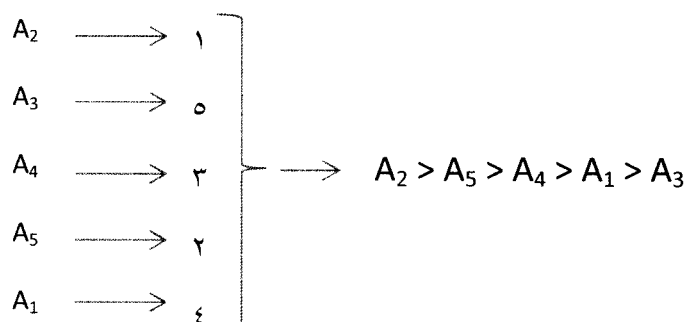
اکنون به روش تخصیص عمل کرده و رتبه بندی نهایی گزینه ها را بدست می آوریم.

جمع امتیازات بدست آمده از اوزان را در جدول قرار داده ایم. پس تخصیص به صورت حداکثر سازی است. بنابراین مقادیر هر ستون را از حداکثر مقدار آن ستون کم می کنیم:

دیده می شود تعداد صفرها حداقل با ۵ خط قابل پوشش است. بنابراین چون با بعد ماتریس که ۵ است برابر است می توانیم عمل تخصیص را به شرح زیر انجام

دهیم:

رتبه گزینه	۱	۲	۳	۴	۵
A_1	۰.۸	۰.۸	۰	۰	۰.۸۵
A_2	۰	۰.۶	۰.۵	۰.۵	۰.۸۵
A_3	۰.۸	۰.۸	۰.۵	۰.۳۵	۰
A_4	۰.۸	۰.۸	۰	۰.۳۵	۰.۷
A_5	۰.۶	۰	۰.۵	۰.۵	۰.۸۵





روش کوک و سیفرد (Cook & Seiford):

این روش به منظور مشخص کردن رتبه بندی نهایی از m گزینه با استفاده از رأی ترجیحی اخذ شده از k تصمیم گیرنده پایه ریزی شده است. این در جایی کاربرد دارد که افراد به تعدادی گزینه رأی می دهند و رتبه بندی افراد مهم است. مثلاً در انتخاب هیأت مدیره، نفر اول رئیس، نفر دوم نایب رئیس، نفر سوم نایب رئیس دوم، نفر چهارم کارپرداز و ... خواهند شد.

مثال: ۶۰ رأی دهنده به سه کاندیدا رأی می دهند. آنان ۳ کاندیدا را بدون قید هیچ شاخصی (یا فقط یک شاخص) رتبه بندی می کنند. اگر نماد $A_i > A_j$ نشان دهنده ارجحیت گزینه A_i بر A_j باشد نتیجه رأی گیری به صورت زیر است:

۲۳ نفر A_1 را بر A_2 و هر دو را به A_3 ترجیح داده اند $\longrightarrow A_1 > A_2 > A_3 = 23$

$A_2 > A_3 > A_1 = 17$

$A_2 > A_1 > A_3 = 2$

$A_3 > A_1 > A_2 = 10$

$A_3 > A_2 > A_1 = 8$

جمع = 60

مشخص کردن فاصله بلوکی:

می توان برای محاسبه فاصله از هر روشی استفاده کرد. مثلاً فاصله اقلیدسی $\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2}$ در فاصله بلوکی توان دوم و جذر نداریم و فقط از قدر مطلق استفاده می کنیم. هر چند در روش کوک و سیفرد از هر روش تعیین فاصله ای می توان بهره برد ولی معمولاً از فاصله بلوکی استفاده می شود.

فاصله مشخص i از گزینه $Dir \sim$

از آمار بالا داریم: ۲۳ نفر A_1 را اول می دانند. ۱۲ نفر A_1 را دوم و مجموعاً ۲۵ نفر هم A_1 را در رتبه سوم قرار داده اند.

$$d_{A_1,1} = 23 \times |1-1| + (17+8) \times |3-1| + (2+10) \times |2-1| = 62$$

فاصل کاندیدای A_1 از رتبه ۱

در مجموع ۱۲ نفر ۲۵ نفر گفته اند رتبه A_1 سوم ۲۳ نفر گفته اند رتبه A_1 اول است و داریم فاصله را نسبت به رتبه اول می سنجیم. پس طبق نظر آنان هیچ فاصله ای بین رتبه انتخابی آنان با رتبه اول نیست. قرار داده اند. به رتبه اول ضربدر تعداد رأی دهنده ها را داریم.

$$d_{A_1,2} = 23 \times |1-2| + 17 \times |3-2| + 2 \times |2-2| + 10 \times |2-2| + 8 \times |3-2| = 48$$

$$d_{A_1,3} = 23 \times |1-3| + 17 \times |3-3| + 2 \times |2-3| + 10 \times |2-3| + 8 \times |3-3| = 58$$

$$d_{A_2,1} = 51$$

$$d_{A_2,2} = 29$$

$$d_{A_2,3} = 69$$

$$d_{A_3,1} = 67$$

$$d_{A_3,2} = 43$$

$$d_{A_3,3} = 53$$

به طریق مشابه، خواهیم داشت:

به عنوان مثال محاسبات مربوط به $d_{A_2,2}$ به قرار زیر است:

$$d_{A_2,2} = 23 \times |2-2| + 17 \times |1-2| + 2 \times |1-2| + 10 \times |3-2| + 8 \times |2-2| = 29$$

اکنون اعداد بدست آمده را در ماتریس فواصل خلاصه می کنیم:

رتبه \ گزینه	۱	۲	۳
A_1	۶۲	۴۸	۵۸
A_2	۵۱	۲۹	۶۹
A_3	۶۷	۴۳	۵۳

اکنون می توانیم به روش مجارستانی تخصیص را صورت دهیم. بهترین گزینه، گزینه ای است که حداقل فاصله را داشته باشد:

به کار گیری روش مجارستانی:

رتبه \ گزینه	۱	۲	۳
A_1	۱۴	۰	۱۰
A_2	۲۲	۰	۴۰
A_3	۲۴	۰	۱۰

کسر کوچکترین عدد هر سطر از بقیه:

رتبه \ گزینه	۱	۲	۳
A_1	۰	۰	۰
A_2	۸	۰	۳۰
A_3	۱۰	۰	۰

کسر کوچکترین عدد هر ستون از بقیه:

رتبه \ گزینه	۱	۲	۳
A_1	۰	۱	۱
A_2	۸	۰	۳۰
A_3	۱۰	۱	۰

دیده می شود با صفر کل خط ها پوشش داده می شود، پس در این مرحله می توانیم تخصیص را صورت دهیم. سطر به سطر حرکت می کنیم و در سطر هایی که یک صفر داریم، تخصیص را انجام می دهیم و روی صفرهای ستون مربوطه را ضربدر قرار می دهیم و در ادامه اگر تخصیص کامل صورت نگرفت به صورت ستونی نیز همین عمل را تکرار می شود.

